2. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **štvrtok 27. 10., 12:00**

Úloha 1. *(1,5 boda)* Nech A je podmnožina prirodzených čísel. *Supermnožinou* množiny A nazveme množinu všetkých nadmnožín množiny A v univerze prirodzených čísel. Budeme ju označovať $\mathcal{S}(A)$. Teda

$$\mathcal{S}(A) = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq X\}.$$

Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{S}(A \cap B) \subseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$,

b) $\mathcal{S}(A \cap B) \supseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$.

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenie dôkážte z definície.

Riešenie

a) Tvrdenie neplatí. Protipríkladom sú napr. množiny $A = \{1\}$ a $B = \{2\}$. Pre množinu $\{1\}$ máme $\{1\} \in \mathcal{S}(A \cap B) = \mathcal{S}(\emptyset)$, lebo $\emptyset \subseteq \{1\}$. Ale $\{1\} \notin \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$, lebo $\{1\} \notin \mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(\{2\})$, lebo $\{2\} \not\subseteq \{1\}$.

b) Ukážeme, že tvrdenie platí. Keďže obe strany inklúzie obsahujú len množiny prirodzených čísel, tak nám stačí ukázať, že $(\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B))$. Pre každé $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ platí:

1. $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$
2. $X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)$
3. $A \subseteq X \wedge B \subseteq X$
4. $A \cap B \subseteq X$, lebo každý prvok y množiny $A \cap B$ sa nachádza aj v A a vďaka $A \subseteq X$ sa y nachádza aj v X
5. $X \in \mathcal{S}(A \cap B)$

Iné riešenie b) Opäť budeme dokazovať, že $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B)$ platí pre všetky $X \subseteq \mathbb{N}$ a taktiež aj pre všetky $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Upravujme tento výrok:

$$
\begin{array}{rc}
X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B) & \\
\text{(definícia prieniku)} & \Updownarrow \\
(X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B) & \\
\text{(definícia supermnožiny)} & \Updownarrow \\
(A \subseteq X \wedge B \subseteq X) \Rightarrow A \cap B \subseteq X & \\
\text{(definícia podmnožiny)} & \Updownarrow \\
((\forall y)(y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (\forall y)(y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (\forall y)(y \in A \cap B \Rightarrow y \in X) & \\
\text{tautológia } ((\forall y)a(y) \wedge (\forall y)b(y)) \Leftrightarrow (\forall y)(a(y) \wedge b(y) & \Updownarrow \\
(\forall y)((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (\forall y)(y \in A \cap B \Rightarrow y \in X) & \\
\text{tautológia } (\forall y)(a(y) \Rightarrow b(y)) \Rightarrow ((\forall y)a(y) \Rightarrow (\forall y)b(y)) & \Uparrow \\
(\forall y)[((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (y \in A \cap B \Rightarrow y \in X)] & \\
\text{(definícia prieniku)} & \Updownarrow \\
(\forall y)[((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow ((y \in A \wedge y \in B) \Rightarrow y \in X)] &
\end{array} \qquad (*)
$$

Dostali sme sa tak k výrokovej forme

$$((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow ((y \in A \wedge y \in B) \Rightarrow y \in X).$$

Na ňu sa však vieme pozrieť ako na zložený výrok s elementárnymi výrokmi $y \in A$, $y \in B$ a $y \in X$, každý z nich môže byť pravdivý alebo nepravdivý. Tento zložený výrok je tautológia. (Dôkaz z riešenia vynechávame, mali by ste byť schopní ho doplniť, tu to ide jednoducho aj tabuľkou.) Teda bez ohľadu na voľbu množín $A, B, X \subseteq$ je výroková forma (*) pravdivá. Vďaka implikáciám $\Uparrow$ tak platí aj $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B)$, čo sme mali dokázať.

Zopár poznámok k druhému riešeniu. Pri riešení tohto typu si musíme dávať pozor na úpravu výrokov s kvantifikátormi, hlavne na ich rôzne „vynímanie pred zárvorky“. Totiž nie vždy ide o korektnú úpravu. Môžeme si všimnúť, že predposledná úprava má formu len jednosmernej implikácie. Preto tento postup nemôžeme použiť v riešení a). Ak aj ukážeme, že (*) v nejakom prípade neplatí, nič nám to nepovie. Totiž z nepravdy stále môže vyplynúť aj pravda.

Úloha 2. *(1,5 boda)* Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, aby sme mali istotu, že medzi vybranými číslami sú dve také, ktorých súčet je deliteľný piatimi?

Riešenie

Ukážeme, že riešením je 42.

Konštrukcia Ukážeme, že existuje výber 41 výber čísel, medzi ktorými neexistujú dve čísla so súčtom deliteľným piatimi. Takým výberom je: všetkých 20 čísel so zvyškom 1 po delení piatimi, všetkých 20 čísel so zvyškom 2 po delení piatimi a číslo 100 (so zvyškom 0). Zo zvyškov 0, 1 a 2 vieme dostať zvyšok 0 len z dvoch zvyškov 0, avšak v našom výbere máme len jedno také číslo. Takže násobok piatich nedostaneme ako súčet dvoch čísel. Čiže 41 čísel nám nestačí vybrať, a teda ani menej ako 41 čísel nestačí.

Prvý dôkaz odhadu Ukážeme, že ak vyberieme aspoň 42 čísel, tak medzi nimi sú dve so súčtom deliteľným piatimi. Všetkých 100 čísel rozdelíme do 41 množín (holubníkov)

- Všetky násobky piatich – súčet ľubovoľných násobkov piatich je deliteľný piatimi.
- 20 množín tvaru $\{5k+1, 5k+4\}$ pre $k \in \{0, 1, \ldots, 19\}$ – súčet jedinej dvojce z taktejto množiny je $5k+5$, čo je deliteľné piatimi.
- 20 množín tvaru $\{5k+2, 5k+3\}$ pre $k \in \{0, 1, \ldots, 19\}$ – súčet jedinej dvojce z taktejto množiny je $5k+5$, čo je deliteľné piatimi.

Ak teda máme aspoň 42 vybraných čísel, čo je viac ako 41, tak z Dirichletovho princípu existujú dve čísla z rovnakej množiny. Vďaka našej voľbe množín majú tieto dve čísla súčet deliteľný piatimi.

Druhý dôkaz odhadu Čísla si rozdelíme do troch skupín podľa zvyškov po delení piatimi:

- Zvyšky 0: z nich môžeme vybrať len jedno číslo, lebo akékoľvek dva z nich majú súčet tiež deliteľný piatimi.
- Zvyšky 1 a 4: ak by sme vybrali aj zvyšok 1 a zvyšok 4, tak z nich dostaneme súčet deliteľný piatimi. Preto z jedného zo zvyškov nemôžme mať žiadne vybrané číslo. Z druhého zvyšku potom môžeme vybrať najviac 20 čísel.
- Zvyšky 2 a 3: ak by sme vybrali aj zvyšok 2, aj zvyšok 3, z nich dostaneme súčet deliteľný piatimi. Rovnako ako v predošlom bode, aj tu vieme vybrať najviac 20 čísel.

Z toho vyplýva, že celkovo vieme vybrať najviac $1 + 20 + 20 = 41$ čísel tak, aby tam neexistovala dvojica so súčtom deliteľným piatimi. Preto pri ľubovoľnom výbere 42 čísel takú dvojicu už zaručene nájdeme.

Tretí dôkaz odhadu Budeme uvažovať len výbery čísel, ktoré neobsahujú dvojicu čísel so súčtom deliteľným piatimi. Ukážeme, že takéto výbery môžu mať najviac 41 čísel. Z toho vyplýva, že pri 42 vybraných číslach už takú dvojicu nájdeme.

Čísla si rozdelíme podľa zvyškov po delení piatimi. Najprv uvažujme 40 čísel s nenulovým zvyškom. Medzi nimi nemôžeme mať naraz zvyšky 1 aj 4, lebo takéto dve čísla majú súčet deliteľný piatimi. To isté platí aj pre zvyšky 2 a 3. Tým pádom všetky kombinácie nenulových zvyškov, ktoré sa môžu objaviť medzi 40 vybranými číslami sú 1 a 2, 1 a 3, 2 a 3, 2 a 4.

Keďže z každého zvyšku máme 20 čísel, tak všetky výbery 40 čísel vyzerajú tak, že obsahujú po 20 čísel z nejakých dvoch nenulových zvyškov r, s. Ak k nim pridáme ďalšie dve čísla, tak tie musia mať zvyšky 0, $5 - r$ alebo $5 - s$. Ak sa medzi nimi objaví jeden zvyšok $5 - r$ (alebo $5 - s$), tak ten vytvorí hľadanú dvojicu so zvyškom r (alebo s). V opačnom prípade majú obe nové čísla zvyšok 0, a teda ony samy majú súčet deliteľný piatimi. Tým sme ukázali, že neexistuje výber 42 čísel, ktorý by neobsahoval žiadnu dvojicu čísel so súčtom deliteľným piatimi.

Komentáre. Samozrejme, vo všetkých troch riešeniach treba uviesť odsek s konštrukciou.

Hoci druhé riešenie oproti prvému nevyužíva žiadne tvrdenie s pekným názvom ako Dirchletov princíp, stále ide o poriadny dôkaz. V skutočnosti, v ňom využívame rovnakú ideu, aká sa skrýva za Dirichletovým princípom, ktorú možno formálne sformulovať nasledovne: Ak $|M_0| \leq 1$ a $|M_{14}|, |M_{23}| \leq$

20 a M_0, M_{14}, M_{23} sú disjunktné množiny (v našom prípade množiny vybraných čísel z jednotlivých troch odrážok druhého dôkazu), tak $|M_0 \cup M_{14} \cup M_{23}| \leq 1 + 20 + 20 = 41$. Toto tvrdenie priamo vyplýva z pravidla súčtu (PS):

$$|M_0 \cup M_{14} \cup M_{23}| \stackrel{\text{PS}}{=} |M_0| + |M_{14}| + |M_{23}| \leq 1 + 20 + 20 = 41.$$

Rovnakú ideu vieme aj využiť v Dôkaze Dirichletovho princípu.

Tretie riešenie nemá moc spoločného s Dirichеltovým princípom. Spočíva v tom, že rozoberieme všetky možnosti, ako môže vyzerať výber 40 čísel a ukážeme, že po pridaní dvoch čísel do každej z nich dostaneme hľadanú dvojicu. Tu by sme chceli upozorniť, že takýto postup nemusí byť použiteľný v iných úlohách podobného typu. Totiž všetkých najlepších / najhorších výberov môže byť veľmi veľa, nemusí byť vôbec ľahké ich opísať a nie to ešte dokázať, že to sú naozaj všetky. Bez tohto dôkazu (ktorý bol v tejto úlohe dosť ľahký) totiž ide o ukážkové **nesrpávne riešenie**, v ktorom len o zopár možnostiach ukážeme, že do nich nevieme pridať prvok. **Preto buďte obozretní a riešte týmto spôsobom len ak ste si istí v tom, čo robíte.** Na písomke sa kľudne môže objaviť úloha, kde riešenie týmto spôsobom bude neschodné.

Úloha 3. *(1,5 boda)* Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 1$ platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}.$$

Riešenie

Na začiatok separátne overíme, že nervnosť platí pre $n = 1$ $(2 < 8)$ a $n = 2$ $(1 + 1 = 2 < 8 = 16/2)$. Platnosť pre všetky $n \geq 3$ dokážeme matematickou indukciou.

Báza Pre $n = 3$ máme $1 + 1 + 8/3 = 14/3 < 32/3$, čo platí.

Indukčný krok Uvažujme teraz $n \geq 3$ $(n \in \mathbb{N})$ a predpokladajme, že pre toto n platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}. \tag{IP}$$

Dokážeme, že potom platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} < \frac{2^{n+3}}{n+1}. \tag{1}$$

Z (IP) vieme, že platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} < \frac{2^{n+2}}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1}. \tag{2}$$

Ekvivalentnými úpravami dokážeme, že platí

$$\begin{aligned} \frac{2^{n+2}}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} &< \frac{2^{n+3}}{n+1} && |: 2^{n+1} \\ \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} &< \frac{4}{n+1} && | \cdot n(n+1),\ n(n+1) > 0 \\ 2n + 2 + n &< 4n \\ 2 &< n \end{aligned} \tag{3}$$

Z platnosti (2) a (3) (vďaka tranzitívnosti nerovnosti) dostávame, že platí (1), čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Nerovnosť (3) stačí dokazovať so symbolom $\leq$, lebo ak $a < b$ a $b \leq c$, tak $a < c$. Potom nemusíme overovať platnosť pre $n = 3$.

Úloha 4. *(0,5 boda)* Anglická abeceda obsahuje 26 písmen. Koľko existuje trojpísmenových slov z písmen anglickej abecedy, v ktorých je prvé písmeno rôzne od zvyšných dvoch (druhé a tretie môžu byť rovnaké)? Pod slovom myslíme trojprvkovú postupnosť písmen. Vašu odpoveď zdôvodnite (stačí stručne, neformálne).

Riešenie

Na prvé miesto si vyberáme z 26 možností. Na druhé miesto iba z 25 možností, lebo druhé písmeno musí byť rôzne od prvého. Na tretie máme len jednu možnosť, lebo musí byť totožné s druhým písmenom. Spolu teda máme $25 \cdot 26$ možností (na základe zovšeobecneného pravidla súčinu).