# 3. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **štvrtok 17. 11., 12:00**

**Úloha 1.** *(3,5 boda)* Konferencie sa zúčastňuje 40 krajín a z každej krajiny traja ľudia: matematik, fyzik a informatik.

a) *(0,8 boda)* Koľkými spôsobmi si môžu účstníci konferencie sadnúť za okrúhly stôl tak, aby účastníci rovnakej národnosti sedeli pri sebe? Možnosti, ktoré sa líšia len otočením, pokladáme za rovnaké.

b) *(0,7 boda)* Koľkými spôsobmi možno medzi účastníkov konferencie rozdeliť 420 identických propagačných letákov tak, aby každý účastník dostal aspoň jeden leták?

c) *(0,5 boda)* Koľkými spôsobmi možno účastníkov konferencie zoradiť do radu tak, aby všetci traja Česi aj všetci traja Slováci boli pri sebe.

d) *(1,5 boda)* Koľkými spôsobmi možno účastníkov konferencie zoradiť do radu, ak nesmie existovať národnosť, ktorá má všetkých troch svojich účastníkov pri sebe?

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite. V podúlohe d) môžete vo výsledku uviesť jednu sumu. Zvyšné výsledky uveďte v uzavretom tvare (teda bez súm, troch bodiek a podobných zdĺhavých vecí).

## Riešenie

**a)** Najskôr spočítame, koľkými spôsobmi si môžu účastníci posadať do radu, aby národnosti sedeli pri sebe. Poradie 40 národností môžeme určiť 40! spôsobmi. Pre každú národnosť máme $3! = 6$ možností, v akom poradí môžu jej členovia sedieť. Spolu teda máme $40! \cdot 6^{40}$ možností usádzania na očíslované stoličky. Zoberme si teraz nejaké rozsadenie a spočítajme, koľkokrát sme ho započítali. Samotné rozsadenie môžeme cyklicky posunúť 120-krát. Avšak my máme započítané len také možnosti, kde nemáme národnosť pri sebe, teda nemôžeme nejakých jej členov mať na začiatku a zvyšok na konci radu. Takýchto posunov je 40, lebo musíme posúvať celé národnosti. Tým pádom možností rozsadenia za okrúhly stôl je

$$\frac{40! \cdot 6^{40}}{40} = 39! \cdot 6^{40}.$$

*Poznámka.* Veľmi častou chybou pri tejto úlohe bolo delenie číslom 120 miesto číslom 40. Pre lepšiu ilustráciu toho, ako to funguje, si ukážeme náš postup na prípade dvoch národností. Budeme mať ľudí 1M, 1F, 1I, 2M, 2F, 2I (číslo je národnosť a písmeno obor). V prvej časti riešenia vypočítame všetky možnosti rozsadenia do radu. Tých nám teraz vyjde $2! \cdot 6^2$, čo presne sú tieto možnosti:

```
1M 1F 1Y 2M 2F 2Y    1F 1Y 1M 2M 2F 2Y    2M 2F 2Y 1M 1F 1Y    2F 2Y 2M 1M 1F 1Y
1M 1F 1Y 2M 2Y 2F    1F 1Y 1M 2M 2Y 2F    2M 2F 2Y 1M 1Y 1F    2F 2Y 2M 1M 1Y 1F
1M 1F 1Y 2F 2M 2Y    1F 1Y 1M 2F 2M 2Y    2M 2F 2Y 1F 1M 1Y    2F 2Y 2M 1F 1M 1Y
1M 1F 1Y 2F 2Y 2M    1F 1Y 1M 2F 2Y 2M    2M 2F 2Y 1F 1Y 1M    2F 2Y 2M 1F 1Y 1M
1M 1F 1Y 2Y 2M 2F    1F 1Y 1M 2Y 2M 2F    2M 2F 2Y 1Y 1M 1F    2F 2Y 2M 1Y 1M 1F
1M 1F 1Y 2Y 2F 2M    1F 1Y 1M 2Y 2F 2M    2M 2F 2Y 1Y 1F 1M    2F 2Y 2M 1Y 1F 1M
1M 1Y 1F 2M 2F 2Y    1Y 1M 1F 2M 2F 2Y    2M 2Y 2F 1M 1F 1Y    2Y 2M 2F 1M 1F 1Y
1M 1Y 1F 2M 2Y 2F    1Y 1M 1F 2M 2Y 2F    2M 2Y 2F 1M 1Y 1F    2Y 2M 2F 1M 1Y 1F
1M 1Y 1F 2F 2M 2Y    1Y 1M 1F 2F 2M 2Y    2M 2Y 2F 1F 1M 1Y    2Y 2M 2F 1F 1M 1Y
1M 1Y 1F 2F 2Y 2M    1Y 1M 1F 2F 2Y 2M    2M 2Y 2F 1F 1Y 1M    2Y 2M 2F 1F 1Y 1M
1M 1Y 1F 2Y 2M 2F    1Y 1M 1F 2Y 2M 2F    2M 2Y 2F 1Y 1M 1F    2Y 2M 2F 1Y 1M 1F
1M 1Y 1F 2Y 2F 2M    1Y 1M 1F 2Y 2F 2M    2M 2Y 2F 1Y 1F 1M    2Y 2M 2F 1Y 1F 1M
1F 1M 1Y 2M 2F 2Y    1Y 1F 1M 2M 2F 2Y    2F 2M 2Y 1M 1F 1Y    2Y 2F 2M 1M 1F 1Y
1F 1M 1Y 2M 2Y 2F    1Y 1F 1M 2M 2Y 2F    2F 2M 2Y 1M 1Y 1F    2Y 2F 2M 1M 1Y 1F
1F 1M 1Y 2F 2M 2Y    1Y 1F 1M 2F 2M 2Y    2F 2M 2Y 1F 1M 1Y    2Y 2F 2M 1F 1M 1Y
1F 1M 1Y 2F 2Y 2M    1Y 1F 1M 2F 2Y 2M    2F 2M 2Y 1F 1Y 1M    2Y 2F 2M 1F 1Y 1M
1F 1M 1Y 2Y 2M 2F    1Y 1F 1M 2Y 2M 2F    2F 2M 2Y 1Y 1M 1F    2Y 2F 2M 1Y 1M 1F
1F 1M 1Y 2Y 2F 2M    1Y 1F 1M 2Y 2F 2M    2F 2M 2Y 1Y 1F 1M    2Y 2F 2M 1Y 1F 1M
```

Skúsme si zobrať napr. možnosť `1M 1F 1Y 2M 2F 2Y`. Jediná možnosť, ktorá zodpovedá tomu istému kruhu, je možnosť `2M 2F 2Y 1M 1F 1Y`. Čiže sme ju započítali len dvakrát, nie šesťkrát.

Ak by sme chceli deliť šiestimi, museli by sme na začiatku riešenia započítať aj riešenia, kde prvá národnosť má začiatku len jedného či dvoch členov a zvyšok na konci radu.

**b)** Najskôr každému účastníkovi rozdáme jeden leták. Ostane nám tak $420 - 120 = 300$ letákov, ktoré chceme rozdeliť medzi 120 účastníkov. Každú takúto možnosť vieme jednoznačne reprezentovať postupnosťou 300 guličiek a 119 oddeľovačov. Oddeľovače nám rozdelia guličky na 120 úsekov a počet guličiek v $i$-tom úseku nám určuje, koľko letákov dostane $i$-ty účastník. Počet spôsobov, ako usporiadať v rade 300 guličiek a 119 oddeľovačov je

$$\binom{419}{300} = \binom{419}{119},$$

keďže nám stačí zo 419 miest vybrať 300 miesto pre guličky. Toto je teda aj výsledok úlohy.

**c)** Miesto troch Slovákov budeme uvažovať jeden prvok $S$ a miesto troch Čechov jeden prvok $C$. Do radu budeme usporiadavať zvyšných 114 účastníkov a dva prvky $S$ a $C$, teda 116 prvkov. Na to máme 114! možností. Aby sme dostali rozmiestnenie 120 účastníkov, tak prvok $S$ nahradíme tromi Slovákmi, na čo máme $3! = 6$ možností a prvok $C$ nahradíme tromi Čechmi, na čo máme opäť $3! = 6$ možností. Spolu teda máme

$$114! \cdot 6^2 \qquad \text{možností.}$$

**d)** Najskôr vypočítame, koľko je možností, kde aspoň jedna národnosť sedí pri sebe. Národnosti si očíslujeme od 1 po 40 a množinu všetkých možností, kde národnosť číslo $i$ sedí pri sebe, označíme ako

$M_i$. Možnosti, kde aspoň jedna národnosť sedí pri sebe, vytvárajú tak množinu $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{40}$. Jej veľkosť vypočítame podľa princípu inklúzie a exklúzie ako

$$|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{40}| = \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 40} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}|.$$

Množina $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}$ je množinou všetkých možností, kde národnosti $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sedia pri sebe. Počet takýchto možností vypočítame tak, že každú trojicu členov z týchto národností nahradíme vlastným novým symbolom a určíme všetky permutácie týchto symbolov spolu so zvyšnými účastníkmi. Celkovo tak permutujeme $120 - 2k$ prvkov, na čo máme $(120 - 2k)!$ možností. Pre každý nový symbol máme ešte 6 možností, v akom poradí troch členov príslušnej národnosti ho nahradiť. Teda

$$|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| = (120 - 2k)! \cdot 6^k.$$

Túto hodnotu sčítavame pre každý výber $k$ národností $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Týchto výberov je $\binom{40}{k}$, takže to len týmto prenásobíme. Máme teda

$$\begin{aligned}
|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{40}| &= \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 40} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| \\
&= \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 40} (120 - 2k)! \cdot 6^k \\
&= \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} \binom{40}{k} (120 - 2k)! \cdot 6^k,
\end{aligned}$$

čo je počet všetkých „zlých“ možností, kde niektorá národnosť sedí pri sebe. „Dobré“ možnosti, kde žiadna národnosť nesedí pri sebe, dostaneme po odčítaní od všetkých možností, ktorých je 120! (permutácie, teda zoradenie 120 účastníkov do radu). Dostávame tak výsledok

$$120! - \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} \binom{40}{k} (120 - 2k)! \cdot 6^k = \sum_{k=0} (-1)^k \binom{40}{k} (120 - 2k)! \cdot 6^k.$$

**Úloha 2.** *(1,5 boda)* V závislosti od čísla $n \in \mathbb{N}$ vypočítajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k (k+1)(n-k) \binom{n+1}{k+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k(k+1)(n-k)\binom{n+1}{k+1} =$$

rozpíšeme kombinačné číslo

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^k(k+1)(n-k)\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} =$$

vykrátime $k+1$ a

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^k \frac{(n+1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

z $(n+1)!$ vyjmeme $(n+1)n$, aby sme mohli dostať kombinačné číslo

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^k (n+1)n\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$= (n+1)n\sum_{k=1}^{n} 2^k \binom{n-1}{k} =$$

pripočítame a odpočítame člen pre $k=0$, člen pre $k=n$ je nulový, tak ten len vyhodíme

$$= (n+1)n\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \binom{n-1}{k} - 2^0\binom{n-1}{0}\right) =$$

teraz môžeme použiť binomickú vetu

$$= (n+1)n\left((1+2)^{n-1} - 1\right) =$$

$$= (n+1)n(3^{n-1} - 1)$$

## Riešenie cez počítanie dvomi spôsobmi

Uvažujme nasledovnú úlohu: Máme $n+1$ študentov, ktorí idú na večierku zahrať scénku. V scénka bude účinkovať nejaká aspoň dvojprvková podmnožina študentov, každý oblečený v buď červenom, alebo zelenom kostýme, jeden z vystupujúcich bude mať mikrofón a jeden z nevystupujúcich bude natáčať. Koľkými spôsobmi sa môžu rozdeliť?

**Prvý spôsob.** Všetky výbery rozdelíme na navzájom disjunktné skupiny, kde v skupine číslo $k$ bude v scénke účinkovať $k+1$ študentov. Počet možností v takejto skupine spočítame nasledovne:

- $\binom{n+1}{k+1}$ možností na výber $k+1$ účinkujúcich študentov spomedzi všetkých $n+1$ študentov.
- $n-k$ možností na výber kameramana spomedzi nevybraných $n+1-(k+1)$ študentov.
- $k+1$ možností na výber účinkujúceho študenta s mikrofónom.
- $2^k$ možností, ako si každý z $k$ zvyšných účinkujúcich študentov môže vybrať červený alebo zelený kostým.

Spolu tak máme $2^k(k+1)(n-k)\binom{n+1}{k+1}$ možností, kde účinkuje $k+1$ študentov. Všetky možnosti dostaneme sčítaním pre možné hodnoty $k$, teda od 1 po $n$, čo nám dáva

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k(k+1)(n-k)\binom{n+1}{k+1}$$

možností, ako je v sume zo zadania.

**Druhý spôsob.** Najskôr vyberieme kameramana, na čo máme $n + 1$ možností. Potom vyberieme účinkujúceho s mikrofónom, na čo máme $n$ možností. Na záver o každom z ostávajúcich $n-1$ študentov určíme, či bude účinkovať v červenom kostýme, či bude účinkovať v zelenom kostýme, alebo nebude účinkovať vôbec. Teda pre každého študenta máme 3 možnosti. To nám dáva $3^{n-1}$ možností, od ktorých však musíme odčítať možnosť, kde neúčinkuje nikto. Spolu nám to dáva

$$(n + 1)n(3^{n-1} - 1)$$

možností. Keďže ide o riešenie rovnakej úlohy, tak táto hodnota musí byť rovná našej sume.