4. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **pondelok 19. 12., 8:00**

Úloha 1. *(0,5 boda)* Na množine $M = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ definujeme reláciu ekvivalencie R, kde aRb práve vtedy, keď $8 \mid (a^2 - b^2)$. Napíšte rozklad, ktorý relácia ekvivalencie R indukuje na množine M.

BONUS (1 bod) Dokážte, že relácia $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 8 \mid (a^2 - b^2)\}$ je reláciou ekvivalencie na množine $\mathbb{Z}$.

Riešenie

Zoberme si číslo 1 a zistime, s ktorými inými číslami je vo vzťahu. Teda čísla $2, 3, \dots, 14$ postupne dosádzame za a do vzťahu $8 \mid a^2 - 1$. Pravdivé tvrdenie dostaneme pre všetky nepárne čísla. Potom zoberieme číslo 2 a analogicky zistíme, že vzťah $8 \mid a^2 - 4$ platí pre čísla 6, 10 a 14. Tu nám stačí skúšať už len párne čísla. Ďalej si zoberieme číslo 4 a anologicky zistíme, že je v relácii s 8 a 12. Tým vyčerpáme všetky čísla a máme tak rozklad:

$$
\begin{aligned}
R[1] &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\},\\
R[2] &= \{2, 6, 10, 14\},\\
R[3] &= \{4, 8, 12\}.
\end{aligned}
$$

Podľa formálnej definície rozkladu, ho vieme zapísať aj ako

$$\{\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}, \{2, 6, 10, 14\}, \{4, 8, 12\}\}.$$

Do riešenia stačilo uviesť len výsledný rozklad. Komentár nebol potrebný.

Bonus

Reflexívnosť: Pre všetky $a \in \mathbb{Z}$ platí $a^2 - a^2 = 0$ a $8 \mid 0$, takže aSa.

Symetrickosť: Pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$ platí: $aSb \Rightarrow 8 \mid a^2 - b^2 \Rightarrow 8 \mid -(b^2 - a^2) \Rightarrow 8 \mid b^2 - a^2 \Rightarrow bSa$.

Tranzitívnosť: Pre všetky $a, b, c \in \mathbb{Z}$ platí:

$$
\begin{gathered}
aSb \wedge bSc\\
\Downarrow\\
8 \mid a^2 - b^2 \wedge b^2 - c^2\\
\Downarrow \text{ (ak dve čísla sú deliteľné ôsmimi, tak aj ich súčet je)}\\
8 \mid a^2 - b^2 + b^2 - a^2\\
\Downarrow\\
8 \mid a^2 - c^2\\
\Downarrow\\
aSc
\end{gathered}
$$

Úloha 2. *(1,5 boda)* Dokážte, že relácia $\preceq$ na $\mathbb{N}^+$, kde

$$a \preceq b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \leq a \leq b < (n+1)^2)$$

je usporiadaním množiny $\mathbb{N}^+$. Nájdite všetky jej minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky a odôvodnite správnosť vášho výberu.

Riešenie

Reflexívnosť: Vezmime si $a \in \mathbb{N}^+$. Po rozpísaní vzťahu $a \preceq a$ dostávame

$$(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \leq a \leq a < (n+1)^2).$$

Nerovnosť $a \leq a$ platí vždy. Potrebujeme teda dokázať

$$(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \leq a < (n+1)^2).$$

Aby sme ľahšie našli vyhovujúce n, môžeme obe nerovnosti odmocniť (keďže všade máme len kladné čísla, ide o ekvivalentnú úpravu), čím dostaneme

$$(\exists n \in \mathbb{N})(n \leq \sqrt{a} < n+1).$$

Toto tvrdenie platí, nakoľko $\sqrt{a}$ sa nachádza medzi dvomi kladnými celými číslami n a $n+1$. Inými slovami, za n vieme zvoliť $\sqrt{a}$ zaokrúhlenú nadol na celé číslo. Tak dostaneme číslo, pre ktorú nám obe nerovnosti platia.

Antisymetrickosť: Zoberme $a, b \in \mathbb{N}^+$, pre ktoré platí $a \preceq b \wedge b \preceq b$. Potom

$$(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \leq a \leq b < (n+1)^2) \wedge (\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \leq b \leq a < (n+1)^2).$$

Z prvého vzťahu vypláva, že $a \leq b$ a z druhého $b \leq a$. Z toho dostávame, že $a = b$.

Tranzitívnosť: Zoberme $a, b, c \in^+$, pre ktoré platí $a \preceq b \wedge b \preceq c$. Vzťah $a \preceq b$ znamená, že $a \leq b$ a obe čísla sú v nejakom intervale tvaru $\langle n; (n+1)^2)$. Podobne, z $b \preceq c$ máme, že $b \leq c$ a obe z nich sú v nejakom intervale tvaru $\langle n; (n+1)^2)$. Z $a \leq b$ a $b \leq c$ máme $a \leq c$. Všetky intervaly tvaru $\langle n; (n+1)^2)$ pre $n \in \mathbb{N}$ sú navzájom disjunktné. Preto všetky a aj c musia byť v tom istom intervale – v tom, ktorý obsahuje b. Tak sme ukázali, že $a \leq c$ a tiež a, c sú v rovnakom intervale $\langle n; (n+1)^2)$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}^+$. To znamená, že $a \preceq c$.

Tranzitívnosť viac formálne: Zoberme $a, b, c \in^+$, pre ktoré platí $a \preceq b \wedge b \preceq c$, teda

$$(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \leq a \leq b < (n+1)^2) \wedge (\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \leq b \leq c < (n+1)^2).$$

Teraz sa zbavíme kvantifikátorov. Existenčný kvantifikátor $(\exists n \in \mathbb{N}^+)$ vieme odstrániť tak, že miesto premennej n napíšeme nejakú novú nepoužitú premennú. Napr. v prvom kvantifikovanom výroku použijeme k a v druhom l. Dostávame tak

$$k^2 \leq a \leq b < (k+1)^2 \wedge l^2 \leq b \leq c < (l+1)^2.$$

Z toho, že $a \leq b$ a $b \leq c$ dostávame $a \leq c$. Ešte musíme ukázať, že čísla a, c sú medzi n^2 a $(n+1)^2$ pre nejaké n. Na to sa nám ponúka dokázať, že $k = l$, čo vieme napríklad takto:

$$
\begin{array}{ll}
l^2 \le b < (k+1)^2 & k^2 \le b < (l+1)^2 \\
\quad\Downarrow & \quad\Downarrow \\
l^2 < (k+1)^2 & k^2 < (l+1)^2 \\
\quad\Downarrow \text{ (obe strany sú kladné)} & \quad\Downarrow \\
l < k+1 & k < l+1 \\
\quad\Downarrow & \quad\Downarrow \text{ (obe strany sú kladné)} \\
l \le k & k \le l
\end{array}
$$

Z $l \le k$ a $l \le k$ máme $k = l$. Spojením predošlých vecí tak máme $k^2 \le a \le c < (l+1)^2 = (k+1)^2$, teda $(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \le a \le c < (n+1)^2)$, čo znamená $a \preceq c$.

Prvky. **Minimálnymi prvkami** sú všetky čísla tvaru k^2 pre $k \in \mathbb{N}^+$. Číslo k^2 sa nachádza v intervale $\langle k^2, (k+1)^2)$, preto vzťah $a \preceq k^2$, ktorý je ekvivalentný s $k^2 \le a \le k^2 < (k+1)^2$, platí jedine pre k^2. Žiadne iné číslo m nie je minimálnym prvkom, lebo $m-1 \preceq m$: keďže m nie je druhou mocninou, tak $m-1$ bude ešte v rovnakom intrvale. Analogicky, **maximálnymi prvkami** sú čísla tvaru $(k+1)^2 - 1 = k^2 + 2k$, nakoľko $k^2 + 2k \preceq b \Leftrightarrow k^2 \le k^2 + 2k \le b < (k+1)^2$ platí len pre $b = k^2 + 2k$. Pre zvyšné čísla m zas platí $m \preceq m+1$.

Najväčšie ani **najmenšie prvky** neexistujú, keďže máme viacero minimálnych a viacero maximálnych prvkov.

Komentár

Častou chybou pri riešení, hlavne sa to prejavilo pri tranzitivite, bola nesprávna práca s kvantifikátormi. Viacerí študenti kvantifikátori odignorovali alebo divne vyňali. Napr. zo zápisu tranzitivity

$(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \le a \le b < (n+1)^2) \wedge (\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \le b \le c < (n+1)^2) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \le a \le c < (n+1)^2)$

spravili

$$(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \le a \le b < (n+1)^2 \wedge n^2 \le b \le c < (n+1)^2) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \le a \le c < (n+1)^2)$$

či

$$(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \le a \le b < (n+1)^2 \wedge n^2 \le b \le c < (n+1)^2 \Rightarrow (n^2 \le a \le c < (n+1)^2).$$

Takéto náhodné presúvanie kvantifikátorov je **nesprávne**. Je to preto, lebo výroky ako

$$[(\exists n \in M)a(n) \wedge (\exists n \in M)b(n)] \Rightarrow (\exists n \in M)(a(n) \wedge b(n))$$

nie sú tautológie (odporúčame nájsť si protipríklad). Ak chcete dokazovať takýmto spôsobom, musíte si rozmyslieť, či vaša úprava s kvantifikátorom, je tautológia a či ju môžete použiť. Avšak skôr je jednoduchšie, existenčný kvantifikátor odstrániť zavedením **novej** premennej, ako to bolo v riešení.

Úloha 3. *(1,5 boda)* Nájdite bijekciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nezabudnite dokázať, že ide o bijekciu. Pre vašu bijekciu f určte $f(10\,000)$. Spôsob výpočtu opíšte do vášho riešenia. V prípade, že si pomôžete programom, uveďte ho v riešení.

Riešenie

Základnými ideami k riešeniu bolo, že $\mathbb{Z}$ aj $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sú spočítateľné množina, teda si ich vieme zoradiť do postupnosti a tieto zoradenia vhodne skombinovať. To sa dalo rôznymi spôsobmi, ilustrujeme len jeden z nich. Samzorejme, pri iných spôsoboch vyšlo $f(10\,000)$ inak.

Opis bijekcie

Celé čísla si zoradíme do postupnosti $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, ktorá sa začína nulou a postupne pre každé číslo $a \in \mathbb{Z}^+$ do nej pridáme členy $a, -a$. Označme si túto postupnosť ako $z_0, z_1, z_2, \ldots$. Tieto postupnosti použijeme ako záhlavie tabuľky, ktorá je z jednej strany nekonečná v oboch rozmeroch. Teda políčko v riadku r a stĺpci s bude obsahovať usporiadanú dvojicu (z_r, z_c). Toto je tiež znázonrnené na obrázk 1.

	0	1	-1	2	-2	3	-3	...
0	(0,0)	(0,1)	(0,-1)	(0,2)	(0,-2)	(0,3)	(0,-3)	...
1	(1,0)	(1,1)	(1,-1)	(1,2)	(1,-2)	(1,3)	(1,-3)	...
-1	(-1,0)	(-1,1)	(-1,-1)	(-1,2)	(-1,-2)	(-1,3)	(-1,-3)	...
2	(2,0)	(2,1)	(2,-1)	(2,2)	(2,-2)	(2,3)	(2,-3)	...
-2	(-2,0)	(-2,1)	(-2,-1)	(-2,2)	(-2,-2)	(-2,3)	(-2,-3)	...
3	(3,0)	(3,1)	(3,-1)	(3,2)	(3,-2)	(3,3)	(3,-3)	...
-3	(-3,0)	(-3,1)	(-3,-1)	(-3,2)	(-3,-2)	(-3,3)	(-3,-3)	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Obr. 1

Teraz prvky políčka tejto tabuľky (teda prvky $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zoradíme do postupnosti. Pre každé $d \in \mathbb{N}$ vezmeme všetky dvojice na d-tej diagonále a idúc sprava hore smerom doľava nadol pridáme tieto dvojice do výsledkej postupnosti. Diagonálu s políčkom $(0, 0)$ berieme ako nultú. Presnejšie, diaganonála číslo d obsahuje políčka (z_r, z_s), kde $r + s = d$.

Takto sme dostali postupnosť, teda zobrazenie $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Toto zobrazenie je injektívne, keďže každý prvok zo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa nachádza v tabuľe len raz a len raz ho pridáme do postupnosti. Taktiež je f surjektívne, keďže na každej diagonále sa nachádza len konečný počet prvkov. Preto sa každá dvojica (ktorá sa nachádza na nejakej diagonále) časom dostane do postupnosti f.

Určenie $f(10\,000)$ výpočtom

Najprv zistíme, na ktorej diagonále sa bude nachdádzať 10 000. člen postupnosti f. Diagonála číslo d (číslujeme od nuly) má $d + 1$ prvkov. Teda na predošlých diagonálach je $1 + 2 + \cdots + d = \frac{1}{2}d(d + 1)$ prvkov. Keďže $\frac{1}{2}140 \cdot 141 = 9\,870 \leq 10\,000 < 10\,011$, tak $f(10\,000)$ sa bude nachádzať na 140. diagonále. (Na toto sa dalo prísť riešením kvadratickej rovnice, alebo aj malou dávkou ťukania do kalkulačky s využitím binárneho vyhľadávania). Diagonála číslo 140 sa začína v 0. riadku a 140. stĺpci a postupne klesá do 140. riadku a 0. stĺpca. Na $f(10\,000)$ potrebujeme klesnúť $10\,000 - 9\,870 = 130$ ráz, teda sa dostaneme do riadku 130 a stĺpca 10. Tam sa nachádza dvojica (z_{130}, z_{10}).

Potrebujeme ešte zistiť, ktoré celé čísla sú na 130. a 10. pozícii našej postupnosti. Obe čísla sú párne a na párnych miestach sú záporné čísla. Presnejšie, $z_{2k} = -k$. preto $z_{10} = -5$ a $z_{130} = -65$. Preto $f(10\,000) = (-65, -5)$.

Určenie $f(10\,000)$ programom

Všimnite si, že náš program celkom priamočiaro kopíruje to, ako sme opisovala fungovanie bijekcie f po matematickej stránke.

```
# rozmer tabulky, ktory v programe pouzijeme
# Hodnota je urcena experimentalne, ak by sme chceli vasi prvok,
```

```python
# tak skusime zvolit vacsiu
n = 800

# Zoradime cele cisla do postupnosti
z = [0]
for a in range(1, n):
    z.append(a)
    z.append(-a)

# Vytvorime si tabulku s prvkami zo Z x Z
tabulka = []
for r in range(n):
    riadok = []
    for s in range(n):
        riadok.append((z[r], z[s]))

# Skratene vytvorenie tabulky
# tabulka = [[(z[r], z[s]) for s in range(n)] for r in range(n)]

# Samotne zoradenie do postupnosti
# V premennej i si pamatame cislo aktualeho prvku
i = 0
# Prechadzame cez vsetky diagonaly
for d in range(n):
    # Prve policko diagonaly
    r, s = 0, d
    while s >= 0:
        # Vypis i-teho clena (ak chceme)
        # print(f’f({i}) = {(z[r], z[s])}’)
        if i == 10000:
            break
        i += 1
        r += 1
        s -= 1
    if i == 10000:
        break

print(f’f(10 000) = {(z[r], z[s])}’)
```

Úloha 4. *(1,5 boda)* Nech G je (jednoduchý, neorientovaný) graf s minimálnym stupňom 17. Dokážte, že graf G obsahuje aspoň 136 kružníc. Dve kružnice považujeme za rovnaké práve vtedy, keď ich množiny hrán sú rovnaké.

Poznámka. Môžete dokázať aj existenciu menšieho počtu kružníc. V takom prípade dostanete čiastkové body primerané použitým myšlienkam. Taktiež, môžete za body navyše ukázať existenciu väčšieho počtu kružníc.

Riešenie

Nech $P = v_0v_1 \dots v_k$ je najdlhšia cesta v grafe G. Ak by vrchol v_k susedil s vrcholom u mimo cesty P, tak $v_0v_1 \dots v_ku$ by bola dlhšia cesta grafu G, čo by bol spor. Preto vrchol v_k susedí iba s vrcholmi z cesty P, teda s vrcholmi $v_0, v_1, \dots, v_k$. Týchto vrcholov je k a vrchol v_k má stupeň 17, preto $k \geq 17$.

Označme susedov vrchola v_k ako $u_1, u_2, \dots, u_{17}$. Pre hocijakú dvojicu čísel i, j, kde $i < j$, vieme nájsť v grafe G nasledovnú kružnicu: Z v_k ideme hranou do u_i, pokračujeme po ceste P do u_j a na záver ideme hranou do v_k. Je jasné, že ide o kružnicu. Navyše, dvojica hrán v_ku_i a v_ku_j je jedinečná pre každú voľbu i, j. Teda všetky tieto kružnice sú v našom ponímaní rôzne. Počet možností, ako si zvoliť také i, j je $\binom{17}{2} = 136$ (vyberáme dve čísla z $1, 2, \ldots, 17$ a nezáleží nám na poradí, keďže to máme jednoznačne určené). Dostali sme tak, že graf G má aspoň 136 kružníc.