4. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **pondelok 19. 12., 8:00**

Úloha 1. *(0,5 boda)* Na množine $M = \{1, 2, 3, \ldots, 14\}$ definujeme reláciu ekvivalencie R, kde aRb práve vtedy, keď $8 \mid (a^2 - b^2)$. Napíšte rozklad, ktorý relácia ekvivalencie R indukuje na množine M.

BONUS (1 bod) Dokážte, že relácia $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 8 \mid (a^2 - b^2)\}$ je reláciou ekvivalencie na množine $\mathbb{Z}$.

Úloha 2. *(1,5 boda)* Dokážte, že relácia $\preceq$ na $\mathbb{N}^+$, kde

$$a \preceq b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n^2 \leq a \leq b < (n+1)^2)$$

je usporiadaním množiny $\mathbb{N}^+$. Nájdite všetky jej minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky a odôvodnite správnosť vášho výberu.

Úloha 3. *(1,5 boda)* Nájdite bijekciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nezabudnite dokázať, že ide o bijekciu. Pre vašu bijekciu f určte $f(10\,000)$. Spôsob výpočtu opíšte do vášho riešenia. V prípade, že si pomôžete programom, uveďte ho v riešení.

Úloha 4. *(1,5 boda)* Nech G je (jednoduchý, neorientovaný) graf s minimálnym stupňom 17. Dokážte, že graf G obsahuje aspoň 136 kružníc. Dve kružnice považujeme za rovnaké práve vtedy, keď ich množiny hrán sú rovnaké.

Poznámka. Môžete dokázať aj existenciu menšieho počtu kružníc. V takom prípade dostanete čiastkové body primerané použitým myšlienkam. Taktiež, môžete za body navyše ukázať existenciu väčšieho počtu kružníc.