

Cvičenie 1A: Výroky

Úloha 1. Zjednodušte nasledovné výrazy a určte pre ne podmienky:

a) $\frac{a^2 - ab}{ab - b^2}$

c) $\left(\frac{1}{n-1} - \frac{3}{n^3-1} - \frac{3}{n^2+n+1}\right) \cdot \left(n + \frac{2n+1}{n-1}\right)$

b) $\frac{2m-n}{m-n} + \frac{m}{n-m}$

d) $\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$

Úloha 2. Rozhodnite, ktoré tvrdenia sú výrokmi:

- Číslo 17 je prvočíslo.
- Trenčín a Brezno sú krajské mestá Slovenska.
- $1 + 1 = 3$
- Každé prirodzené číslo je párne.
- Dajte mi A z Diskrétnej matematiky!
- Koľko je hodín?
- V posluchárni B sa teraz nachádza aspoň 5 ľudí.
- Každé párne číslo väčšie ako 2 možno zapísať ako súčet dvoch prvočísel.
- Tento výrok je nepravdivý.

Úloha 3. Zistite, či nasledovné zložené výroky sú tautológie.

a) $(a \wedge b) \Rightarrow a$

d) $[a \wedge (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$

b) $a \Rightarrow (a \vee b)$

c) $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

e) $[a \wedge (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee c]$

Úloha 4. Znegujte nasledovné zložené výroky

a) $a \wedge (b \Rightarrow \neg c)$

b) $(a \Rightarrow \neg b) \vee (\neg c \Leftrightarrow a)$

c) $a \wedge [(b \wedge \neg a) \vee (c \wedge \neg b)]$

Úloha 5. Na ostrove žijú poctivci a klamári. Poctivec vždy hovorí pravdu a klamár vždy iba klame. Na brehu ostrova sú Anton a Beáta. Príde k nim cudzinec a pýta sa Antona: „Ste klamár alebo poctivec?“ Anton odpovie nezrozumiteľne. Cudzinec sa otočí k Beate: „Čo hovoril?“ Beáta odpovedá: „Hovoril, že je klamár.“ Čo sú Anton a Beáta? Dá sa to určiť? Mohli niečo také povedať?

Úloha 6. Nieкто zo štyroch kamarátov zjedol koláč, ktorý bol pre všetkých. Katka vraví: „Anna zjedla koláč.“ Zuzka: „Ja som zjedla koláč.“ Anna: „Peter ho zjedol.“ Peter: „Anna klame, keď hovorí, že ja som ho zjedol.“ Ak je len jeden z výrokov pravdivý, kto je páchatel?

Úloha 7. Na vesmírnej lodi sú astronauti a podvodníci. Astronaut vždy hovorí pravdu a podvodník vždy klame. Medzi Červeným, Zeleným a Modrým sa udial nasledovný rozhovor:

Červený: „Zelený je astronaut, ale Modrý je podvodník.“

Zelený: „Červený aj Modrý sú podvodníci.“

Modrý: „Červený aj Zelený sú podvodníci.“

Určte, kto sú astronauti a kto podvodníci.

Úloha 8. Určte, kto je kto po nasledovnom rozhovore:

Červený: „Ak Modrý hovorí pravdu, tak Zelený je podvodník.“

Zelený: „Ak Červený hovorí pravdu, tak Modrý je podvodník.“

Modrý: „Ak je Zelený astronaut, tak Modrý je tiež astronaut.“

Určte, kto sú astronauti a kto podvodníci.

Úloha 9. Určte, kto je kto po nasledovnom rozhovore:

Červený: „Žltý je podvodník, no Zelený je astronaut.“

Žltý: „Zelený je podvodník, no Modrý je astronaut“

Zelený: „Modrý je podvodník, no Červený je astronaut“

Modrý: „Zelený je podvodník, no Červený je astronaut.“

Nasledovné úlohy nepotrebujete vedieť riešiť na tomto predmete, no ich riešenia sú zaujímavé.

Úloha 10. (*) Vyjadrite spojky \Rightarrow a \Leftrightarrow pomocou spojok \neg , \wedge , \vee . (Teda k výrokom $A \Rightarrow B$ a $A \Leftrightarrow B$ nájdite ekvivalentné výroky obsahujúce len spomínané spojky.)

Úloha 11. (*) Vyjadrite spojku \vee pomocou \neg a \wedge .

Úloha 12. (*) Možno akúkoľvek (binárnu) logickú spojku vyjadriť pomocou \neg a \wedge ?

Úloha 13. (*) Viete nájsť jednu logickú spojku, pomocou ktorej možno vyjadriť všetky (binárne) logické spojky? Ak áno, skúste vyjadriť \wedge , \vee , pomocou danej spojky.