Cvičenie 1B: Výroky a kvantifikátory

→ **Úloha 1.** Pre každý z daných výrokov sformulujte niekoľko výrokov v tvare implikácie („Ak ..., tak...“), ktoré sú s daným výrokom ekvivalentné alebo z neho vyplývajú:

a) Nutnou podmienkou pre udelenie vodičského preukazu je úspešné absolvovanie skúšobného testu.

b) Volieb do NRSR sa smú zúčastniť len plnoletí občania SR zapísaní do zoznamov voličov podľa príslušnej vyhlášky.

c) Jediné párne prvočíslo je 2.

d) Každé celé číslo, ktoré končí číslicou 6, je párne.

→ **Úloha 2.** Vyjadrite slovne nasledovné výroky a určte ich pravdivostnú hodnotu.

a) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x > 5)$

b) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 > 0)$

c) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt{x} \in \mathbb{R}^+)$

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -1)$

e) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{Z})(y = 5)$

f) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z})(x = 5)$

→ **Úloha 3.** Znegujte výroky z predošlej úlohy.

→ **Úloha 4.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení. V tejto aj nasledujúcich úlohách chceme do vás aj zdôvodnenie vašej odpovede.

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

→ **Úloha 5.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 0)$.

Úloha 6. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x \cdot 1 = x)$

b) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(x \cdot 1 = x)$

c) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x \cdot x = 1)$

d) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(x \cdot x = 1)$

e) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

f) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

g) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

h) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

Úloha 7. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

b) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

c) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

d) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

e) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

f) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

Úloha 8. Zapíšte matematickou formulou (bez ohľadu na pravdivosť výrokov):

→ a) Pripočítaním nuly sa žiadne reálne číslo nezmení.

→ b) Celé číslo d je deliteľom celého čísla a. (Túto výrokovú formu zapisujeme ako $d \mid a$, čo čítame tiež: „d delí a.“ V tejto podúlohe vyjadrite tento zápis pomocou matematických formúl. V ďalších podúlohách už môžete znak $\mid$ bez problémov používať.)

→ c) Existuje párne číslo, ktoré je väčšie ako 7.

→ d) Každé celé číslo deliteľné desiatimi je deliteľné aj dvomi.

→ e) Žiadne celé číslo deliteľné tromi nie je párne.

→ f) Súčin dvoch nepárnych celých čísel je nepárne celé číslo.

g) Každé číslo deliteľné šiestimi je párne.

h) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich celých čísel je deliteľný tromi.

→ i) Existuje najmenšie celé číslo.

→ j) Existuje práve jedno párne celé číslo. (V tomto kontexte sa v matematike bežne používa kvantifikátor $\exists!$ („exituje práve jeden“). Tu však chceme vyjadrenie bez tohto kvantifikátora.)

k) Ľubovoľne malé kladné reálne číslo vieme zdola aproximovať kladným racionálnym číslom.

l) Ľubovoľné reálne číslo vieme napísať ako súčet celého čísla a nezáporného reálneho čísla menšieho ako 1.

m) Medzi ľubovoľnými dvomi racionálnymi číslami je nejaké iracionálne.

n) (*) Prvočísel je nekonečne veľa.

o) (*) Pre každé celé čísla a, d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d.