Cvičenie 1B: Výroky a kvantifikátory

→ **Úloha 1.** Pre každý z daných výrokov sformulujte niekoľko výrokov v tvare implikácie („Ak ..., tak...“), ktoré sú s daným výrokom ekvivalentné alebo z neho vyplývajú:

a) Nutnou podmienkou pre udelenie vodičského preukazu je úspešné absolvovanie skúšobného testu.

b) Volieb do NRSR sa smú zúčastniť len plnoletí občania SR zapísaní do zoznamov voličov podľa príslušnej vyhlášky.

c) Jediné párne prvočíslo je 2.

d) Každé celé číslo, ktoré končí číslicou 6, je párne.

→ **Úloha 2.** Vyjadrite slovne nasledovné výroky a určte ich pravdivostnú hodnotu.

a) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x > 5)$

b) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 > 0)$

c) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt{x} \in \mathbb{R}^+)$

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -1)$

e) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{Z})(y = 5)$

f) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z})(x = 5)$

Riešenie

a)	$(\exists x \in \mathbb{Z})(x > 5)$	Existuje celé číslo väčšie ako 5	T
b)	$(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 > 0)$	Druhá mocnina každého celého čísla je kladná.	F
c)	$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt{x} \in \mathbb{R}^+)$	Odmocnina každého reálneho čísla je kladná.	T
d)	$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -1)$	Existuje reálne číslo, ktorého druhá mocnina je -1.	F
e)	$(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{Z})(y = 5)$	Ak existuje celé číslo rovné piatim, tak všetky celé čísla sú rovné piatim.	F
f)	$(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z})(x = 5)$	Ak existuje celé číslo rovné piatim, tak všetky celé čísla sú rovné piatim.	F

Zdôvodnenia:

a) Platí, lebo napr. $x = 42$ je celé číslo a je väčšie ako 5.

b) Neplatí, lebo $x = 0$ je celé číslo, ale neplatí preň $0^2 > 0$.

c) Platí, ide o známe tvrdenie.*

d) Neplatí, lebo také číslo neexistuje – druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná.*

e) Neplatí. Ide o zložený výrok – implikáciu, ktorá sa skladá z dvoch výrokov. Na ľavej strane je pravdivý výrok – lebo napr. 5 je celé číslo, ktoré je rovné piatim. Na pravej nepravdivý výrok – lebo napr. pre $x = 6$ (čo je celé číslo) dostaneme nepravdu $6 = 5$.

f) Neplatí. Ide o totožný výrok ako v d). Hoci v oboch výrokoch je použitá premenná x, táto premenná platí iba vrámci daného kvantifikovaného výroku. Čiže ide vlastne o dve rôzne premenné. Podobnú situáciu vieme stretnúť aj v programovaní, kedy bežne na rôznych miestach v kóde používame premenné s rovnakým názvom (napr. dva for cykli s premennou i).

*Tieto podúlohy nie sú zrovna reprezentatívne z pohľadu argumentácie. Áno, ide o zjavné tvrdenia a v tomto prípade je zdôvodnenie v poriadku. Neskôr sa budeme viac venovať zdôvodňovaniu takýchto všeobecných tvrdení a vtedy zdôvodnenie „Je to zjavné“ nemusí stačiť.

$\rightarrow$ **Úloha 3.** Znegujte výroky z predošlej úlohy.

$\rightarrow$ **Úloha 4.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení. V tejto aj nasledujúcich úlohách chceme do vás aj zdôvodnenie vašej odpovede.

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

Riešenia úloh sú zoradené podľa ich náročnosti. Oproti úlohe 2 sú zdôvodnenia už stručnejšie

Riešenie

a) Neplatí, lebo pre $x = 1$, $y = 2$ neplatí $1 + 2 = 0$.

d) Platí, lebo pre $x = 3$, $y = -3$ platí $3 + (-3) = 0$.

c) Platí, lebo pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ platí:pre $y = -x$ platí $x + (-x) = 0$.

b) Neplatí, lebo pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ zvolíme $y = 1 - x$ (čo je zjavne reálne číslo), pre ktoré máme $1 + (1 - x) = 1 \neq 0$, teda výrok $1 + (1 - x) = 0$ neplatí.

Uvedomme si, že v podúlohe b) sme vlastne dokazovali negáciu tvrdenia, ktorá vyzerá: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y \neq 0)$. Preto sme použili takúto štruktúru – začali sme dokazovať všeobecný výrok „Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}\ldots$“ a pre toto všeobecné x sme začali dokazovať existenčný výrok, čo sme začali voľbou y. Po prejdení kvantifikátorov sme dokazovali, že platí $x + y \neq 0$.

Výroky b) a c) ilustrujú, že na poradí kvantifikátorov záleží. To môžeme ilustrovať aj rôznymi slovnými významami výrokov b) a c):

b) Existuje reálne číslo, ktoré dáva súčet 0 s ľubovoľným reálnym číslom.

c) Každé reálne číslo dáva súčet 0 s nejakým reálnym číslom.

Pre lepšie ujasnenie tohto vzťahu sa pozrieme ešte na nasledovnú úlohu.

$\rightarrow$ **Úloha 5.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 0)$.

Riešenie

a) Neplatí, lebo pre $x = 4$ a $y = 2$: $4 \cdot 2 \neq 0$.

b) Platí lebo pre $x = 0$ platí $(\forall y \in \mathbb{R})(0 \cdot y = 0)$

c) Platí, lebo pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí: pre $y = 0$ dostaneme $x \cdot 0 = 0$.

d) Platí, lebo pre $x = 0$ a $y = -17$ platí $0 \cdot (-17) = 0$.

Úloha 6. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x \cdot 1 = x)$

b) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(x \cdot 1 = x)$

c) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x \cdot x = 1)$

d) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(x \cdot x = 1)$

e) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

f) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

g) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

h) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

Úloha 7. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

b) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

c) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

d) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

e) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

f) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

Úloha 8. Zapíšte matematickou formulou (bez ohľadu na pravdivosť výrokov):

→ a) Pripočítaním nuly sa žiadne reálne číslo nezmení.

→ b) Celé číslo d je deliteľom celého čísla a. (Túto výrokovú formu zapisujeme ako $d \mid a$, čo čítame tiež: „d delí a.“ V tejto podúlohe vyjadrite tento zápis pomocou matematických formúl. V ďalších podúlohách už môžete znak $\mid$ bez problémov používať.)

→ c) Existuje párne číslo, ktoré je väčšie ako 7.

→ d) Každé celé číslo deliteľné desiatimi je deliteľné aj dvomi.

→ e) Žiadne celé číslo deliteľné tromi nie je párne.

→ f) Súčin dvoch nepárnych celých čísel je nepárne celé číslo.

g) Každé číslo deliteľné šiestimi je párne.

h) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich celých čísel je deliteľný tromi.

→ i) Existuje najmenšie celé číslo.

→ j) Existuje práve jedno párne celé číslo. (V tomto kontexte sa v matematike bežne používa kvantifikátor $\exists!$ („exituje práve jeden“). Tu však chceme vyjadrenie bez tohto kvantifikátora.)

k) Ľubovoľne malé kladné reálne číslo vieme zdola aproximovať kladným racionálnym číslom.

l) Ľubovoľné reálne číslo vieme napísať ako súčet celého čísla a nezáporného reálneho čísla menšieho ako 1.

m) Medzi ľubovoľnými dvomi racionálnymi číslami je nejaké iracionálne.

n) (*) Prvočísel je nekonečne veľa.

o) (*) Pre každé celé čísla a, d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d.

Riešenie

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 0 = x)$

b) $(\exists k \in \mathbb{Z})(a = kd)$

c) $(\exists a \in \mathbb{Z})(2 \mid a \wedge a > 7)$

d) $(\forall n \in Z)(10 \mid n \Rightarrow 2 \mid n)$

e) $(\forall n \in Z)(3 \mid n \Rightarrow 2dn)$

f) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})((2 \nmid a \wedge 2 \nmid b)(\exists m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{Z})(m \leq a)$

j) $(\exists a \in \mathbb{Z})(2 \mid a) \wedge (\forall a, b \in \mathbb{Z})((2 \mid a \wedge 2 \mid b) \Rightarrow a = b)$