Cvičenie 2A: Dôkazy I

Úloha 1. Znegujte nasledovné výroky:

a) $(\exists n \in \mathbb{N})(42 < n < 47)$

→ b) $(\forall a \in \mathbb{N}^+)(\exists b \in \mathbb{N})(\forall c \in \mathbb{N})(c > b \Rightarrow c^a < 2^c)$

→ c) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})[(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{Q})(|a - c| < b)]$

→ d) $(\forall a \in \mathbb{N})[(\exists b \in \mathbb{N})(a = b^2) \Rightarrow [(\forall c \in \mathbb{N})(a \neq 3c) \Rightarrow (\exists d \in \mathbb{N})(a + 2 = 3d)]]$

e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R})[c = x \cdot y \Rightarrow [(\forall z \in \mathbb{R})(z > c \Rightarrow z > 0)]]]$

→ **Úloha 2.** Akú pravdivostnú hodnotu majú výroky $(\forall x \in M)a(x)$, $(\exists x \in M)a(x)$ ak M je a) jednoprvková množina b) prázdna množina?

→ **Úloha 3.** Máme dokázať, že platí

$$\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

Nižšie sa nachádza pokus o dôkaz tohto tvrdenia. Na koľko ide o korektný dôkaz?

Pokus o riešenie

Zo školy vieme, že nerovnosti môžeme rôzne upravovať, tak poďme na to:

$$\begin{aligned}
\sqrt{60} &> \sqrt{13} + \sqrt{17} \qquad |^2 \\
\left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13} + \sqrt{17}\right)^2 \\
60 &> 13 + 2\sqrt{13}\sqrt{17} + 17 \\
60 &> 30 + 2\sqrt{221} \qquad | -30 \\
30 &> 2\sqrt{221} \qquad | \ /2 \\
15 &> \sqrt{221} \qquad |^2 \\
255 &> 221
\end{aligned}$$

Takto sme sa dostali k niečomu, čo platí, takže aj pôvodná nerovnosť je pravdivá.

→ **Úloha 4.** Porovnajte dôkaz predošlého s dôkazom tvrdenia, že $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Pokus o riešenie

Opäť na to pôjdeme rovnako ako v predošlom príklade. Teda budeme upravovať dokazovanú nerovnosť:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &> \sqrt{3}, \qquad | -\sqrt{3} \\
\sqrt{2} - \sqrt{3} &> 0, \qquad |^2 \\
2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 &> 0, \qquad | +2 \cdot \sqrt{6} \\
5 &> 2 \cdot \sqrt{6}, \qquad |^2 \\
25 &> 24,
\end{aligned}$$

a to je pravda. Preto platí $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

→ **Úloha 5.** Dokážte, že platí
$$(\forall x \in \mathbb{R}_0^+)(\forall y \in \mathbb{R}_0^+)\ \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Úloha 6. Zistite, či nasledovné tvrdenia sú tautológie

→ a) $[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$,

→ b) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

c) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

d) $[(a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \vee c)] \Rightarrow [((c \Rightarrow d) \wedge a) \Rightarrow d]$

e) $(a \wedge \neg b) \vee [((\neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg e) \wedge (f \vee \neg g)) \Rightarrow (d \vee \neg e)]$

f) $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \Rightarrow (d \wedge \neg e)) \vee (\neg c \wedge d \wedge e) \vee (d \Rightarrow (\neg a \wedge c))$.

Úloha 7. Dokážte, že platí:

a) $\sqrt{9-\sqrt{10}} < \sqrt{9+\sqrt{10}} - 1$

b) $\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

c) $\sqrt{4} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{12}$

d) $\sqrt{60} + \sqrt{\sqrt{47} - \sqrt{46}} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

Riešenie úloh 3 a 4

Ako správne písať dôkazy

V tejto časti ilustrujeme zopár príkladov správneho zápisu dôkazov. Všetky riešenia sú písané pomerne minimalisticky, len s nevyhnutnými komentármi. Ak si však pri riešení nie ste istí, odporúčame vám písať do riešenia aj slovné komentáre, ktoré popisujú vaše zdôvodnenia a argumenty.

Dôkaz nerovnosti z úlohy 3

Uvedené riešenie vieme opraviť dvomi spôsobmi

1. spôsob riešenia

$$\begin{aligned}
255 &> 221 \qquad |\sqrt{\ }\text{(obe strany kladné)}\\
15 &> \sqrt{221}\\
30 &> 2\sqrt{221}\\
60 &> 30+2\sqrt{221}\\
60 &> 13+2\sqrt{13}\sqrt{17}+17\\
\left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)^2\\
\left|\sqrt{60}\right| &> \left|\sqrt{13}+\sqrt{17}\right|\\
\sqrt{60} &> \sqrt{13}+\sqrt{17}
\end{aligned}$$

2. spôsob riešenia

$$\begin{aligned}
\sqrt{60} &> \sqrt{13}+\sqrt{17} \qquad |^2\\
&\Uparrow\\
\left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)^2\\
&\Uparrow\\
60 &> 13+2\sqrt{13}\sqrt{17}+17\\
&\Uparrow\\
60 &> 30+2\sqrt{221} \qquad |-30\\
&\Uparrow\\
30 &> 2\sqrt{221} \qquad |/2\\
&\Uparrow\\
15 &> \sqrt{221} \qquad |^2\\
&\Uparrow\\
255 &> 221
\end{aligned}$$

V skutočnosti však dôkazy vôbec nemusia byť lineárne. Nové tvrdenie v dôkazovej postupnosti nemusí vyplývať iba z predošlého, ale môže vyplývať aj z ľubovoľných už dokázaných tvrdení. Takýmto štýlom vieme zostaviť dôkaz, ktorý je založený na výpočtoch, resp. presnejšie, odhadoch.

3. spôsob riešenia

1. $60 > 59{,}9076$ (zjavná pravda)
2. $\sqrt{60} > 7{,}74$ (lebo 1.)
3. $13{,}0321 > 13$ (zjavná pravda)
4. $3{,}61 > \sqrt{13}$ (lebo 3.)

5. $17{,}0569 > 17$ (zjavná pravda)
6. $4{,}13 > \sqrt{17}$ (lebo 3.)
7. $7{,}74 = 3{,}61 + 4{,}13 > \sqrt{13} + \sqrt{17}$, lebo 4. a 5.
8. $\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$, lebo 2. a 6.

V 6. kroku sme využili, že ak platí $a < c$ a zároveň $b < d$, tak platí aj $a + b < c + d$, pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c, d. V 7. kroku sme zas využili, že ak platí $a < b$ a zároveň $b < c$, tak platí aj $a < c$ (pre $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$).

V tomto prípade sme jednotlivé kroky dôkazu písali pod seba a slovne sme naznačili, na základe čoho sme tvrdenie dostali. Zdôvodnenia v zátvorkách možno vynechať. Taktiež tieto zdôvodnenia možno zaznačiť aj inak. Jedným z ďalších spôsobov je využitie šípok / implikácií, čo z čoho vyplýva.

4. spôsob riešenia

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}13{,}0321 > 13 \Rightarrow 3{,}61 > \sqrt{13}\\ 17{,}0569 > 17 \Rightarrow 4{,}13 > \sqrt{17}\end{array}\right\} \Rightarrow 7{,}74 > \sqrt{13}+\sqrt{17}\\ 60 > 59{,}9076 \Rightarrow \sqrt{60} > 7{,}74\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{60} > \sqrt{13}+\sqrt{17}$$

Dôkaz tautológie 6 a)

Zápis riešenie cez postupnosť tvrdení

Výrok je tautológia. Dôkaz sporom.

1. Nech platí $\neg[[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]]$
2. $(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)$ (z 1.)
3. $\neg[\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$ (z 1.)
4. $\neg b$ (z 3.)
5. $\neg(e \vee d)$ (z 3.)
6. $\neg e$ (z 5.)
7. $\neg d$ (z 5.)
8. $a \Rightarrow b$ (z 2.)
9. $\neg a$ (z 4. a 8.)
10. $(c \vee d)$ (z 2.)
11. c (z 7. a 11.)
12. $(\neg a \wedge c) \Rightarrow e$ (z 2.)
13. $\neg a \wedge c$ (z 9. a 11.)
14. e (z 12. a 13.) – to je spor s 6.

Pri dôkaze sporom je potrebné napísať, že ideme dokazovať sporom (kľudne aj jedným slovom. A následne označiť, čo je s čím v spore (v našom prípade 6. a 14.). Pri takýchto riešeniach často hovoríme o tom, že nejaký výrok platí alebo neplatí. To sa dá značiť viacerými spôsobmi.

- Pravdivé výroky môžeme písať len tak ako krok (napr. body 2., 8., 10., 14.), nepravdivé vieme písať formou, že platí ich negácia (napr. body 1., 3., 4, 5.). (Toto je použité aj v riešení)
- Pravdivosť vieme vyjadriť ekvivalenciou s pravdivostnou hodnotou, napr.
  1. $[[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]] \Leftrightarrow 0$
  4. $b \Leftrightarrow 0$

8. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow 1$

14. $e \Leftrightarrow 1$

Pritom si však dávajte pozor, aby to nevyzeralo ako dosadenie pravdivostnej hodnoty za elementárny výrok.

- Použiť ohodnotenie / valuáciu výrokov v:

1. $v([(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]) = 0$

14. $v(e) = 1$

Tento spôsob sa často používa pri hlbšom štúdiu matematickej logiky. Na tomto predmete však nie je nutné sa ním zaobrať.

Ešte si ukážeme, že dôkazy sa dajú zapisovať aj ako text. Tento text zároveň aj detailnejšie vysvetľuje, čo sa deje v predšlom symbolickom dôkaze. Záver je mierne odlišný.

Zápis riešenia textom

Sporom. Nech neplatí $[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$. Potom $(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)$ platí a výrok $\neg b \Rightarrow (e \vee d)$ neplatí. Z neskoršieho dostávame, že $\neg b$ je pravda, teda $b \Leftrightarrow 0$; a tiež $e \vee d$ neplatí, teda $e \Leftrightarrow 0$ a $d \Leftrightarrow 0$. Z pravdivého výroku $(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)$ vieme, že $(a \Rightarrow b)$ platí. Preto keďže $b \Leftrightarrow 0$, tak aj $a \Leftrightarrow 0$. Tiež nám platí $(c \vee d)$, z čoho vďaka $d \Leftrightarrow 0$ máme, že $c \Leftrightarrow 1$. Napokon nám platí aj $(\neg a \wedge c) \Rightarrow e$. Keď tam však dosadíme určené pravdivostné hodnoty, tak nám vyjde $(1 \wedge 1) \Rightarrow 0$, čo však pravda nie je, a to je spor.

Dôkaz ne-tautológie 6 b)

Ak chceme dokázať, že zložený výrok nie je tautológia, máme to jednoduché – stačí nám uviesť jeden prípad, kedy nám vyjde nepravda + vyhodnotiť (resp. aspoň naznačiť vyhodnotenie výroku).

Riešenie

Nejde o tautológiu, lebo pre $a \Leftrightarrow 0$, $b \Leftrightarrow 0$, $c \Leftrightarrow 0$, $d \Leftrightarrow 1$, $e \Leftrightarrow 1$ vyjde nepravda:

$$\underbrace{\underbrace{[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee \underbrace{(e \wedge \neg c \wedge \neg a)}_{1}]}_{1} \Rightarrow \underbrace{[\underbrace{(\neg b \wedge \neg c)}_{1} \Rightarrow \underbrace{a}_{0}]}_{0}}_{0}$$

Upozorňujeme, na časté nesprávne (neúplné riešenie)

Nesprávne riešenie

Pre spor predpokladajme, že výrok neplatí

1. $\neg[[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]]$
2. $(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a$ (z 1.)
3. $(\neg b \wedge \neg c)$ (z 2.)
4. $\neg b$ (z 3.)
5. $\neg c$ (z 3.)

6. $\neg a$ (z 2.)

7. $(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)$ (z 1.)

8. $\neg(\neg a \Rightarrow b)$ (z 4. a 6.)

9. $\neg(c \wedge d)$ (z 5.)

10. $e \wedge \neg c \wedge \neg a$ (z 7., lebo prvé dva výroky v disjunkcii sú nepravdivé, tak musí platiť tretí)

11. e (z 10.)

Dostali sme ohodnotenie elementárnych výrokov, kedy platí $a \Leftrightarrow 0$, $b \Leftrightarrow 0$, $c \Leftrightarrow 0$, $e \Leftrightarrow 1$ (d môže byť aj pravda, aj nepravda). Teda výrok nie je tautológia.

Hoci takto zrejme budete riešiť takéto úlohy, toto nie je dôkaz – vychádzame totiž z predpokladu, že zložený výrok neplatí a tak nemôžeme dokázať, že naozaj neplatí. Dokonca v takejto situácii môžeme dojsť aj nesprávnemu záveru (teda by výrok bol tautológiou) – to, že sa nám nepodarilo dostať ku sporu, neznamená, že tam niekde skrytý nie je.

V takejto situácii potrebujeme overiť, že pre nami nájdené ohodnotenie elementárnych výrokov nám vyjde naozaj nepravda (alebo to iným spôsobom zdôvodniť, ale overenie je najjednoduchšie a najistejšie). Je to rovnaká situácia, ako keď pri riešení rovnice (či sústavy rovníc) nám nestačí dospieť k tomu, že $x = 17$, $y = 42$ a $z = 47$, ale potrebujeme ešte vykonať skúšku správnosti (alebo iným spôsobom odargumentovať, že nami nájdené riešenie vyhovuje).