Cvičenie 2B: Dôkazy II

Úloha 1. Dokážte alebo vyvráťte nasledovné tvrdenia:

→ a) $(\forall a,\, b \in \mathbb{N})[(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a+b)]$

→ b) $(\forall a,\, b \in \mathbb{N})[(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

→ c) $\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.

→ d) Dokážte, že ak súčin dvoch reálnych čísel x a y je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel x a y iracionálne.

e) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

f) $(\forall n \in \mathbb{N})(5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

g) Ak prirodzené číslo n nie je deliteľné tromi, tak n^2 dáva po delení tromi zvyšok 1.

h) Ak súčet reálnych čísel a, b, c, d, e je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

i) Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\frac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\frac{a-b}{a+b}$.

j) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

k) $(\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+)\left(\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right)$

Úloha 2. Pre každý z uvedených výrokov nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(t)$ a $b(t)$ definovaných na množine M, aby po ich dosadení do výroku sme dostali pravdivý / nepravdivý výrok

→ a) $[(\exists x \in M)a(x) \wedge (\exists y \in M)b(y)] \Rightarrow (\forall z \in M)(a(z) \Rightarrow b(z))$

b) $(\forall x \in M)\,[a(x) \Rightarrow (\exists y \in M)b(y)] \Rightarrow (\forall x \in M)(a(x) \Rightarrow b(x))$

Úloha 3. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie. V prípade, že nejde o tautológiu, možno dostať tautológiu nahradením $\Leftrightarrow$ za $\Leftarrow$ alebo $\Rightarrow$?

→ a) $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)a(x)$

→ b) $(\exists x)a(x) \Rightarrow (\forall x)a(x)$

→ c) $(\forall x)(a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \wedge (\forall x)b(x))$

→ d) $(\forall x)(a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \vee (\forall x)b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)a(x) \wedge (\exists x)b(x))$

f) $(\exists x)(a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)a(x) \vee (\exists x)b(x))$

→ g) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

h) $(\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x))$

i) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

$\rightarrow$ **Úloha 4.** Rozhodnite o platnosti nasledovných výrokov:

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q})$

b) $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(47n^5 + 42n^3 + 17n^2 - 9 \leq cn^5)$

c) $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(n^2 + 47 \leq cn)$

d) $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq K \Rightarrow x^7 - 50x^6 - 47x^5 - 42x^3 - 17x^2 + 18x - 9 \geq 0)$

Úlohy na ďalšie precvičovanie

Vo všetkých úlohách chceme od vás úplné riešenie. Teda aj keď úloha je formulovaná „Rozhodnite...“, tak v riešení uveďte dôkaz vášho tvrdenia.

Úloha 5. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 6. Dokážte, že ak e (eulerova konštanta) nie je riešením polynomiálnej rovnice s celočíselnými koeficientmi, tak ani $2e$ nie je.

Úloha 7. O čísle π vieme, že je iracionálne. Dokážte, že číslo

$$\frac{47}{\sqrt[3]{\pi} + 42}$$

je tiež iracionálne.

Úloha 8. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je $\sqrt{p}$ iracionálne číslo.

Úloha 9. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?

Úloha 10. Dokážte, že ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Úloha 11. Dokážte, že pre každé celé čísla x, y platí

$$31 \mid 6x + 11y \Leftrightarrow 31 \mid x + 7y.$$

Úloha 12. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 13. (*) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo 2 najväčším spoločným deliteľom čísel $2n + 6$, $4n + 10$.

Úloha 14. (*) Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.

Úloha 15. a) $[(\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists y)b(y)] \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(a(x) \Rightarrow b(y))$

Ako dokazovať kvantifikované tautológie

Ilustrijeme si to na úlohe 3g), kde dokážeme, že

$$(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$$

je tautológia.

Priamy dôkaz

1. Nech platí $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$.
Dokážeme, že platí $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$:
    2. Nech platí $(\forall x)a(x)$.
    Dokážeme, že platí $(\forall x)b(x)$:
        Pre každé x platí:
            3. $a(x)$ (lebo 2.)
            4. $a(x) \Rightarrow b(x)$ (lebo 1.)
            5. $b(x)$ (lebo 3. a 4.)
        Teda platí $(\forall x)b(x)$.
    Teda platí $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$
Teda platí $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

Komentár. Dokazovaná tautológia má formu implikácie. Tú dokazujeme priamo tak, že predpokladáme pravdivosť ľavej strany a ukážeme, že platí aj pravá strana. Keďže na pravej strane je opäť implikácia, tak tento postup zopakujeme. Dôkazy týchto dvoch implikácií sú v červených rámčekoch. Dostaneme sa k dokazovaniu výroku v tvare všeobecného kvantifikátora (modrý rámček). Ten dokazujeme tak, že napíšeme dôkaz kvantifikovanej výrokovej formy všeobecne za pomoci premennej (zlený rámček). Všimnite si, že vnútri zeleného rámčeka nemáme žiadne kvantifikátory. Do vašich riešení nemusíte písať tento komentár. Tiež môžete vypustiť aj závery „Teda platí. . . “

Dôkaz sporom

Pre spor predpokladajme, že (pre nejaké univerzum a nejaké výrokové formy $a(x)$, $b(x)$ na ňom definované) platí negácia, teda:

1. $\neg[(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))]$
2. $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \wedge \neg[(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)]$ (negácia 1.)
3. $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$ (lebo 2.)
4. $(\exists x)(a(x) \wedge \neg b(x))$ (lebo 2. + negácia)
5. $a(c) \wedge \neg b(c)$ pre nejaký prvok c (lebo 4.) (tu sme zaviedli do nášho dôkazu **novú** premennú c, ktorou sme označili prvok univerza, ktorého existenciu zaručuje výrok 4.)
6. $a(c) \Rightarrow b(c)$ (lebo 2. platí pre všetky prvky univerza, teda aj pre naše c)
7. $\neg(a(c) \Rightarrow b(c))$ (negácia 5.) – SPOR s tvrdením 6.

Časti písané šedou slúžia pre lepšie objasnenie, do riešenia takto podrobne netreba písať.

Niekoľko rád ako dokazovať výroky podľa ich typu

Tu je prehľad základných štruktúr dôkazu podľa typu výroku, ktorý máme dokazovať. Defaultne tak dostaneme priamy dôkaz, ale nič nám nebraní pred dokazovaním si dokazované tvrdenie upraviť na iné (nepriamym dôkazom či matematickou indukciou).

$A \land B$: Dokážme A a potom dokážeme B.

$A \lor B$: Rozdelíme dôkaz na dva prípady (napr. ak je nejaké číslo párne alebo nepárne). Z jedného dokážeme A a zdruhého dokážeme B.

$A \Rightarrow B$: Predpokladáme, že A platí a dokážeme B.

$A \Leftrightarrow B$: Dokážeme $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

$\diamond$ V niektorých prípadoch je možné nájsť postupnosť ekvivalentých úprav od výroku A k B. Tu však treba byť obozretný, či naozaj všetky sú ekvivalentné. Pre lepšiu kontrolu odporúčame skontrolovať, či sú všetky úvahy správne jedným aj druhým smerom.

$(\forall x)a(x)$: Dokážeme $a(x)$ za použitia premennej x.

$(\exists x)a(x)$: Ukážeme platnosť $a(x)$ pre jednu konkrétnu voľbu premennej x (napr. dokážeme $a(47)$). Pri voľbe x môžeme použiť aj premenné, ale iba ak už v našom dôkaze nejaké máme definované (a nesmú byť „zakryté“ kvantifikátorom).

A tu je prehľad základných logických krokov, ktoré vieme počas dokazovania robiť. Opäť pre každý z najčastejších typov výrokov uvádzame, čo z neho možno odvodiť.

$A \land B$: Vieme odvodiť platnosť A, rovnako aj platnosť B.

$A \lor B$: Vieme rozdeliť dôkaz na dve časti, v jednej predpokladáme platnosť A a v druhej platnosť B (vhodné pri dokazovaní výrokov so spojkou alebo).

$A \Rightarrow B$: Ak máme už dokázané A, vieme odvodiť platnosť B

$A \Leftrightarrow B$: Rovnako ako pri $A \Rightarrow B$, príp. $B \Rightarrow A$.

$(\forall x)a(x)$: Vieme za x dosadiť honotu a odvodiť pre ňu platnosť výroku (napr. $a(47)$, ak sme v celých číslach).

$(\exists x)a(x)$: Zavedieme **novú** premennú, napr. c, a odvodíme platnosť $a(c)$.