Cvičenie 3B: Množiny

→ **Úloha 1.** Dokážte identity:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platia identity:

→ a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

→ c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$.

→ **Úloha 4.** Rozhodnite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

b) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

Pre množinu M definujeme *potenčnú množinu* množiny M ako množinu všetkých podmnožín množiny M. Označujeme ju ako $\mathcal{P}(M)$. Teda

$$\mathcal{P}(M) = \{X;\ X \subseteq M\}.$$

Pri dôkazoch teda budeme využívať, že $X \in \mathcal{P}(M) \Leftrightarrow X \subseteq M$.

→ **Úloha 5.** Zistite, v akom vzťahu (rovnosť / inklúzia / žiaden) sú množiny:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$

Úloha 6. Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ sa dá pre $n \geq 2$ vyjadriť ako:

a) $A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup (A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$

b) $(A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

Úloha 7. Nech A, B, C sú množiny.

a) Dokážte, že ak $A \subseteq B$, tak $A \times C \subseteq B \times C$.

b) Ako sa zmenení výsledok z a), ak namiesto $\subseteq$ píšeme $\subsetneq$?

c) Platí aj opačná implikácia?

Úloha 8. Dokážte, že množiny A a B sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

Úloha 9. Dokážte, že nasledovné tri podmienky sú ekvivalentné:

(i) $A \subseteq B$,

(ii) $A \cup B = B$,

(iii) $A \dot{-} B = B - A$.

Úloha 10. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}$.

Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 11. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$.

Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 12. Nech A je podmnožina prirodzených čísel. *Supermnožinou* množiny A nazveme množinu všetkých nadmnožín množiny A v univerze prirodzených čísel. Budeme ju označovať $\mathcal{S}(A)$. Teda

$$\mathcal{S}(A) = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq X\}.$$

Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{S}(A \cap B) \subseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$,

b) $\mathcal{S}(A \cap B) \supseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$.

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenie dôkážte z definície.

Riešenie úlohy 5a)

Riešenie

Ukážeme, že $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)
3. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A \cap B$, lebo každý prvok množiny X sa nachádza v A (vďaka $X \subseteq A$) aj v B (vďaka $X \subseteq B$), teda sa nachádza aj v $A \cap B$.
5. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ (definícia potenčnej množiny).

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.
Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $X \subseteq A \cap B$ (definícia potenčnej množiny)
3. $X \subseteq A$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq A$)
4. $X \subseteq B$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq B$)
5. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (lebo 3. a 4.)
6. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia potenčnej množiny)
7. $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Leftarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.

Zdôvodnenie šedou sú zrejmé (ide len o použitie definície), môžete ich vynechať. Dôkaz 4. kroku 1. inklúzie možno spraviť viac formálne aj takto:

i. Nech $y \in X$

ii. $y \in A$ (lebo $X \subseteq A$)

iii. $y \in B$ (lebo $X \subseteq B$)

iv. $y \in A \cap B$ (lebo ii. a iii.)

Podobne možno formálne dokázať aj 3. krok (a analogicky aj 4. krok) z 2. inklúzie:

i. Nech $y \in X$

ii. $y \in A \cap B$ (lebo $X \subseteq A \cap B$)

iii. $y \in A$ (definícia prieniku)

Riešenie úlohy 10

a) Ukážeme, že tvrdenie a) platí. Nech X je ľubovoľný prvok z množiny $\mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}$, ukážeme, že $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$:

1. $X \in \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A - B) \wedge X \notin \{\emptyset\}$ (definícia rozdielu)
3. $X \neq \emptyset$ (z 2.)
4. $X \subseteq A - B$ (z 2. + definícia $\mathcal{P}$)
5. Ak si zoberieme ľubovoľný prvok $y \in X$, tak podľa 4. $y \in A - B$, teda $y \in A$. Preto $X \subseteq A$.
6. Keďže $X \neq \emptyset$, tak X obsahuje nejaký prvok z. Pre tento prvok podľa 4. platí $z \in A - B$, teda $z \notin B$. Keďže $(\exists z)(z \in X \wedge z \notin B)$, tak $X \nsubseteq B$.
7. $X \subseteq A \wedge X \nsubseteq B$ (z 5. a 6.)
8. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(B)$ (definícia $\mathcal{P}$)
9. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ (definícia rozdielu)

Tým sme ukázali, že $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\} \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B))$, teda a) platí.

b) Ukážeme, že b) vo všeobecnosti neplatí. Nech $A = \{1, 2\}$ a $B = \{1\}$, potom

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \{\{2\}, \{1, 2\}\} \nsubseteq \{\{2\}\} = \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}.$$

Riešenie úlohy 11

Ukážeme, že **a) platí**. Nech $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$, potom:

1. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A \cap C)$ (definícia rozdielu množín)
3. $X \subseteq A \cap B \wedge X \nsubseteq A \cap C$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A$
   Dôkaz: Pre každé y platí: $y \in X \overset{X \subseteq A \cap B}{\Rightarrow} y \in A \cap B \Rightarrow y \in A$.
5. $X \nsubseteq C$
   Dôkaz: $X \nsubseteq A \cap C \Rightarrow (\exists z)(z \in X \wedge z \notin A \cap C) \Rightarrow (\exists z)(z \in X \wedge (z \notin A \vee z \notin C))$. Z toho, že $z \in X$ a $X \subseteq A$ máme, že $z \in A$. Preto zo $z \notin A \vee z \notin C$ vypláva $z \notin C$. Teda existuje také z, že $z \in X \wedge z \notin C$, preto $X \nsubseteq C$.
6. $X \subseteq A \wedge X \nsubseteq C$ (4. a 5.)
7. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(C)$ (definícia potenčnej množiny)
8. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ (definícia rozdielu)

Riešenie úlohy 12

a) Tvrdenie neplatí. Protipríkladom sú napr. množiny $A = \{1\}$ a $B = \{2\}$. Pre množinu $\{1\}$ máme $\{1\} \in \mathcal{S}(A \cap B) = \mathcal{S}(\emptyset)$, lebo $\emptyset \subseteq \{1\}$. Ale $\{1\} \notin \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$, lebo $\{1\} \notin \mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(\{2\})$, lebo $\{2\} \nsubseteq \{1\}$.

b) Ukážeme, že tvrdenie platí. Keďže obe strany inklúzie obsahujú len množiny prirodzených čísel, tak nám stačí ukázať, že $(\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B))$. Pre každé $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ platí:

1. $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$
2. $X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)$
3. $A \subseteq X \wedge B \subseteq X$
4. $A \cap B \subseteq X$, lebo každý prvok y množiny $A \cap B$ sa nachádza aj v A a vďaka $A \subseteq X$ sa y nachádza aj v X
5. $X \in \mathcal{S}(A \cap B)$

Iné riešenie b) Opäť budeme dokazovať, že $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B)$ platí pre všetky $X \subseteq \mathbb{N}$ a taktiež aj pre všetky $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Upravujme tento výrok:

$$\begin{array}{rl}
 & X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B) \\
\text{(definícia prieniku)} & \Updownarrow \\
 & (X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B) \\
\text{(definícia supermnožiny)} & \Updownarrow \\
 & (A \subseteq X \wedge B \subseteq X) \Rightarrow A \cap B \subseteq X \\
\text{(definícia podmnožiny)} & \Updownarrow \\
 & ((\forall y)(y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (\forall y)(y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (\forall y)(y \in A \cap B \Rightarrow y \in X) \\
\text{tautológia } ((\forall y)a(y) \wedge (\forall y)b(y)) \Leftrightarrow (\forall y)(a(y) \wedge b(y)) & \Updownarrow \\
 & (\forall y)((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (\forall y)(y \in A \cap B \Rightarrow y \in X) \\
\text{tautológia } (\forall y)(a(y) \Rightarrow b(y)) \Rightarrow ((\forall y)a(y) \Rightarrow (\forall y)b(y)) & \Uparrow \\
 & (\forall y)[((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (y \in A \cap B \Rightarrow y \in X)] \\
\text{(definícia prieniku)} & \Updownarrow \\
 & (\forall y)[((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow ((y \in A \wedge y \in B) \Rightarrow y \in X)] \qquad (*)
\end{array}$$

Dostali sme sa tak k výrokovej forme

$$((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow ((y \in A \wedge y \in B) \Rightarrow y \in X).$$

Na ňu sa však vieme pozrieť ako na zložený výrok s elementárnymi výrokmi $y \in A$, $y \in B$ a $y \in X$, každý z nich môže byť pravdivý alebo nepravdivý. Tento zložený výrok je tautológia. (Dôkaz z riešenia vynechávame, mali by ste byť schopní ho doplniť, tu to ide jednoducho aj tabuľkou.) Teda bez ohľadu na voľbu množín $A, B, X \subseteq \mathbb{N}$ je výroková forma (*) pravdivá. Vďaka implikáciám $\Uparrow$ tak platí aj $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B)$, čo sme mali dokázať.

Zopár poznámok k druhému riešeniu. Pri riešení tohto typu si musíme dávať pozor na úpravu výrokov s kvantifikátormi, hlavne na ich rôzne „vynímanie pred zátvorky“. Totiž nie vždy ide o korektnú úpravu. Môžeme si všimnúť, že predposledná úprava má formu len jednosmernej implikácie. Preto tento postup nemôžeme použiť v riešení a). Ak aj ukážeme, že (*) v nejakom prípade neplatí, nič nám to nepovie. Totiž z nepravdy stále môže vyplynúť aj pravda.