

Cvičenie 5B: Enumerácie II

V nasledujúcich úlohách pracujeme s 52 žolíkovými kartami bez žolíkov. Každá karta má jednu zo štyroch farieb (srdcia, káry, piky, trefy) a jednu z trinástich hodnôt (2, 3, ..., 10, dolník (J), kráľovná (Q), kráľ (K), eso (A)). Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme množinu piatich kariet.

- **Úloha 1.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií?
- **Úloha 2.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?
- Úloha 3.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?
- **Úloha 4.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?
- **Úloha 5.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?
- Úloha 6.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?
- Úloha 7.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby (*straight*)?
- **Úloha 8.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú trojicu kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve inej hodnoty, navzájom rôznej (*trojica*);
- **Úloha 9.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x , dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z , pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?
- **Úloha 10.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú aspoň jedno eso?
- **Úloha 11.** Na večierku je n mužov a n žien. Koľkými spôsobmi sa vedia postaviť do kruhu, ak
- nie sú žiadne obmedzenia,
 - dve ženy nesmú stáť vedľa seba.
- Úloha 12.** Za okrúhly stôl s $2n$ stoličkami chceme usadiť n manželských párov. Manželia musia sedieť vedľa seba, ale je jedno, či muž bude napravo od manželky alebo opačne. Koľkými spôsobmi ich môžeme usadiť, ak
- rozlišujeme stoličky?
 - nerozlišujeme stoličky?
- **Úloha 13.** Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po prehodení práve jednej dvojice figúrok?
- Úloha 14.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok (bez obmedzení daných šachovými pravidlami).
- Úloha 15.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby všetky biele figúrky boli v riadkoch 1 až 4 a všetky čierne figúrky boli v riadkoch 5 až 8?
- Úloha 16.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby v každom stĺpci bol práve jeden biely pešiak?

→ **Úloha 17.** Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dve čierne veže a bieleho kráľa tak, aby žiadna z veží kráľa neohrozovala? (Veža v našej terminológii ohrozuje kráľa aj v prípade, keď ju kráľ môže v ďalšom kroku vyhodiť.)

Úloha 18. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu bieleho a čierneho koňa tak, aby sa navzájom neohrozovali?

Úloha 19. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dvoch nerozlíšiteľných koňov tak, aby sa navzájom neohrozovali?

→ **Úloha 20.** Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej časť (nezáleží nám na poradí)?

Úloha 21. Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej časť tak, aby obsahovala aspoň jedného strelca a najviac troch koňov?

→ **Úloha 22.** Máme 52 kariet: 26 červených a 26 modrých. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať podmnožinu tak, aby v nej bol rovnaký počet červených a modrých kariet?

Úloha 23. V závislosti od $n, k \in \mathbb{N}$ určte, ktoré z čísel

$$\binom{n}{k} \quad \text{a} \quad \binom{n}{k+1}$$

je väčšie.

Výsledky

1. $\binom{52}{5}$

2. $9 \cdot 4 = 36$

3. $13 \cdot 48 = 624$

4. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744$

5. $\binom{52}{5} - 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 2595216$

6. $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$

7. $9 \cdot 4^5 = 9216$

8. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 48 \cdot 44/2 = 54912$

9. $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123552$

10. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.

13. $\binom{32}{2} - 2\left(\binom{8}{2} - 3\right)$

14. $\frac{64!}{32! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 2^6}$

15. $\left(\frac{32!}{16! \cdot 8! \cdot 2^3}\right)^2$

16. $8^8 \cdot \binom{56}{24} \frac{24!}{8! \cdot 2^6}$

17. $64 \binom{49}{2} = 75264$

18. $64 \cdot 63 - (4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8) = 3696$

19. $3696/2 = 1848$

20. $(9 \cdot 3^3 \cdot 2^2)^2$

21. $2^{24}(2^4 - 1)(2^4 - 1) = 2^{24} \cdot 15^2 = 3774873600$

22. $\sum_{k=0}^{26} \binom{26}{k} \binom{26}{k} = \binom{52}{26}$