Cvičenie 6B: Počítanie súm

Pri počítaní súm sa snažíme nájsť výraz s rovnakou hodnotou, akú má počítaná suma. Výsledný výraz nesmie obsahovať žiadnu sumu alebo súčin s premenným počtom členov. Aké metódy môžeme použiť na dokazovanie súm?

1. Vypočítať si niekoľko prvých členov, na základe nich si tipnúť výsledok a následne dokázať jeho správnosť (napr. matematickou indukciou). Veľa výsledkov je však takých, že nevidno dobre z nich, čo sú zač.
2. Použiť pri výpočte inú, už známu sumu. Často si to vyžaduje upraviť sumu do tvaru vhodného pre aplikáciu známej sumy. To často obnáša
   - použiť kombinatorické identity;
   - rozpísať si kombinačné čísla cez faktoriály a upraviť ich tak, aby sme dostali kombinačné číslo (čísla) vhodné pre sumáciu;
   - vyňatie konštanty pred sumu ($\sum c \cdot a_k = c \sum a_k$);
   - rozdelenie sumy na viac súm ($\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$);
   - substituovať premenné, upraviť tým sumačný rozsah.
3. Upraviť známu sumu obsahujúcu reálnu premennú x (napr. Binomickú vetu) do vhodného tvaru aplikovaním operácie ako sú derivácia alebo integrácia.
4. Nájsť kombinatorickú interpretáciu sumy (teda nejakú úlohu kde počet možností možno počítať riešenou sumou) a prísť k počtu možností iným, jednoduchším spôsobom. Teda ide o to, čo sme trénovali na cvičení 5, len s tým, že máme len jednu stranu rovnosti.

Pri používaní známych súm príde najviac vhod binomická veta.

Veta 1 (Binomická veta)**.** *Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Môžete však používať aj iné známe sumy, napr. tie, čo sa uvádzajú v skriptách alebo v cvičení 5. Ak však používate sumu z cvičenia, ktorá nemá názov, tak súčasťou úplného riešenia by mal byť aj jej dôkaz. Keď používate sumu, ktorá je pomenovaná (napr. Cauchyho sčítací vzorec), uveďte jej názov – vtedy je vidno, že sa odvolávate na niečo známe a taktiež na aké presne tvrdenie sa odvolávate, teda nemusíte písať do riešenia aj dôkaz.

→ **Úloha 6B.1.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 6B.2.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 3^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 6B.3.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 6B.4.** Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(3k+1)\binom{n}{k}.$$

Úloha 6B.5. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}k2^k\binom{n}{k}.$$

Úloha 6B.6. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}k(k-1)\binom{n}{k}.$$

Úloha 6B.7. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}k^2\binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 6B.8.** Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 6B.9.** Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Úloha 6B.10. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{n}{2k}.$$

Úloha 6B.11. (*) Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{n}{4k}.$$

Úloha 6B.12. (*) Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{n}{5k}.$$

Úloha 6B.13. (*) Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\binom{n}{4k}.$$

Úloha 6B.14. (*) Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{k+1}\binom{n}{4k}.$$

Úloha 6B.15. Vypočítajte
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}.$$

Úloha 6B.16. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{k!(n-k!)}.$$

Úloha 6B.17. Vypočítajte pre $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$:

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{k}{2} (n-k)$$

Výsledky

6B.1. 0

6B.2. 4^n

6B.3. $n \cdot 2^{n-1}$

6B.4. $3n \cdot 2^{n-1} + 2^n$

6B.5. $2n \cdot 3^{n-1}$

6B.6. $n(n-1) \cdot 2^{n-2}$

6B.7. $n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2}$

6B.8. $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

6B.9. $\dfrac{1}{n+1}$

6B.10. 2^{n-1}

6B.11.

6B.12.

6B.13.

6B.14.

6B.15. $\binom{2n}{m}$

6B.17. $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2^{n-3}$ Zdroj: `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~kompisova/uktg1819/du/du02-ries`