Cvičenie 8B: Princíp inklúzie a exklúzie

Veta 1 (Princíp zapojenia a vypojenia)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú konečné množiny. Potom*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}} \left|\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j}\right|.$$

→ **Úloha 1.** V autobuse je celkovo 102 cestujúcich. 49 z nich hovorí po francúzky, 34 po anglicky a 21 po nemecky. Siedmi ľudia ovládajú francúzštinu aj angličtinu, piati francúzštinu aj nemčinu a deviati angličtinu a nemčinu. Všetkými troma jazykmi hovoria dvaja ľudia. Koľkí z cestujúcich nehovoria žiadnym z týchto troch jazykov? Koľko je takých ľudí, ktorí nehovoria po francúzky, ale za to ovládajú angličtinu alebo nemčinu?

Úloha 2. Študenti sa mali podrobiť trom skúškam. Zo 124 študentov zložilo len prvú 22, prvú a druhú zložilo 28, druhú a tretiu 52, len druhú 12, prvú alebo tretiu (aspoň jednu z nich) 96, všetky tri 20, ani prvú ani druhú 30. Koľko študentov nespravilo ani jednu skúšku? Koľko ich ešte bude robiť jednotlivé skúšky?

Úloha 3. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ je deliteľných aspoň jedným z čísel 2 a 3?

Úloha 4. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ je deliteľných aspoň jedným z čísel 2, 3 a 5?

Úloha 5. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ nie je deliteľných žiadnym z čísel 2, 3 a 7?

Úloha 6. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ nie je druhou ani treťou mocninou žiadneho prirodzeného čísla?

→ **Úloha 7.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) obsahujú aspoň jednu z postupností $(1, 2, 3)$ alebo $(4, 5, 6)$ ako súvislú podpostupnosť?

→ **Úloha 8.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, ani $(42, 44, 8, 55)$?

→ **Úloha 9.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré obsahujú aspoň jednu z postupností $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ alebo $(7, 8, 9)$ ako súvislú podpostupnosť?

→ **Úloha 10.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, $(47, 17, 57)$ ani $(42, 44, 8, 100)$?

Úloha 11. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, $(100, 1, 8)$, ani $(42, 44, 8, 55)$?

Úloha 12. Vyriešte úlohy 7 až 11 pre prípad, že uvažované podpostupnosti nemusia byť súvislé.

→ **Úloha 13.** Máme tri jednoeurové mince, štyri dvojeurové mince a päť trojeurových mincí. Koľkými spôsobmi z nich možno vybrať desať mincí?

Úloha 14. Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22.$$

Koľko existuje celočíselných riešení tejto rovnice takých, že platí $0 \leq x_1 \leq 7$, $0 \leq x_2 \leq 11$, $0 \leq x_3 \leq 5$ a $0 \leq x_4 \leq 8$?

→ **Úloha 15.** Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22.$$

Koľko existuje celočíselných riešení tejto rovnice takých, že platí $2 \leq x_1 \leq 7$, $-1 \leq x_2 \leq 8$, $0 \leq x_3 \leq 5$ a $-2 \leq x_4 \leq 9$?

Úloha 16. Koľko prešmyčiek neobsahujúcich tri rovnaké písmená za sebou je možné vytvoriť zo slova `ANTANANARIVO`?

V nasledujúcich úlohách môžete vo výsledku uviesť jednu sumu.

→ **Úloha 17.** Koľko existuje $2n$-prvkových postupností, ktoré

- každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ obsahujú práve dvakrát a zároveň
- obsahujú aspoň na jednom mieste dve rovnaké čísla vedľa seba?

→ **Úloha 18.** Fakulta ponúka 60 voliteľných predmetov. Každý zo 100 prvákov si vyberie práve jeden voliteľný predmet. Koľkými spôsobmi si môžu študenti vybrať predmety, ako každý voliteľný predmet si vybral aspoň jeden študent?

Úloha 19. Koľkými spôsobmi možno v kine posadiť n manželských párov do poslednej rady, kde je $2n$ miest, tak, aby žiaden manželský pár nesedel vedľa seba?

Úloha 20. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) neobsahujú súvislú podpostupnosť $(i, i+1)$ pre $i \in \{1, \ldots, 99\}$?

Úloha 21. Koľko celočíselných riešení, takých že pre každé $i \in 1, 2, \ldots, n$ platí $0 \leq x_i \leq 47$ má rovnica

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s?$$