Cvičenie 9A: Relácie

→ **Úloha 1.** Majme reláciu M z množiny $\{a, b, c, d\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a reláciu N na množine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ktoré máme zadané nasledovne:

$$M = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$
$$N = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

Vypíšte relácie M^{-1}, N^{-1}, MN, NM, M^+, N^+, M^*, N^* (ak existujú).

Úloha 2. Na množine L všetkých ľudí, ktorá má rozklad $\{M, Z\}$ na mužov a ženy, definujeme relácie:

- D: $aDb \Leftrightarrow a$ je dieťaťom b,
- S: $aSb \Leftrightarrow a$ je zosobášený(-ná) s b.

Pomocou relácií D, S, operácií na reláciách a množinových operácií definujte relácie:

a) je rodičom,
b) je matkou,
c) je dedkom,
d) je súrodencom,
e) je bratom,
f) je svokrou,
g) je ujom,
h) je sesternicou,
i) je predkom,
j) je príbuzným.

→ **Úloha 3.** Nech D a E sú relácie medzi prvkami množín A a B. Dokážte, že $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$.

→ **Úloha 4.** Nech D je relácia medzi prvkami množín A a B a nech E je relácia medzi prvkami množín B a C. Dokážte, že potom $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$.

Úloha 5. Nech R, R_1, R_2 sú binárne relácie z A do B a S, S_1, S_2 binárne relácie z B do C. Rozhodnite, či vo všeobecnosti platia nasledonvé tvrdenia:

a) $R(S_1 \cap S_2) = RS_1 \cap RS_2$

b) $(R_1 \cap R_2)S = R_1S \cap R_2S$

c) $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$

d) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$

e) ak $S_1 \subseteq S_2$, tak potom $RS_1 \subseteq RS_2$

f) ak $R_1 \subseteq R_2$, tak potom $R_1S \subseteq R_2S$

g) $R(S_1 - S_2) = RS_1 - RS_2$

h) $(R_1 - R_2)S = R_1S - R_2S$

V prípade, že v niektorom prípade neplatí rovnosť, platí aspoň jedna inklúzia? Platia v c) a d) obrátené implikácie? (Riešenie úlohy si môžete pozrieť v skriptách Olejár, Škoviera na strane 70 (77 v pdf), Veta 4.3).

Úloha 6. Nech $|A| = n \in \mathbb{N}$. Určite koľko relácií je na množine A

a) reflexívnych?

b) symetrických?

c) reflexívnych a symetrických?

d) antisymetrických?

e) symetrických a nie reflexívnych?

f) asymetrických?

g) (*) tranzitívnych

h) (*) symetrických, reflexívnych a nie tranzitívnych?

Úloha 7. Aké relácie poznáte zo strednej školy alebo z bežného života? Určte o nich, či sú reflexívne, ireflexívne, symetrické, tranzitívne, príp. ďalšie vlastnosti.

→ **Úloha 8.** Uvažujme relácie

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \geq 1\} \qquad \text{a} \qquad T = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 6 \mid a + b\}.$$

Rozhodnite o nich, či sú reflexívne, ireflexívne, symetrické a tranzitívne.

Úloha 9. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna, asymetrická a antisymetrická:

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle -1, 1\rangle\}$

→ b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 + 4y^2 < 4xy\}$

→ c) Relácia U na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in U \Leftrightarrow 47 \in x \cap y$.

d) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ac = bd$

e) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

f) $\mid\ = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(b = k \cdot a)\}$

g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ \sin x = \sin y\}$

h) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 7 \mid a + b\}$

i) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.

j) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cup y = \mathbb{Z}$.

k) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.

l) Relácia P na $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, taká že $(A, B) \in P \Leftrightarrow |A| = |B|$, kde $|M|$ označuje počet prvkov (konečnej) množiny M.

m) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ c - d = 4\}$

n) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (cd + 100)(cd - 60) = 0\}$

o) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |x + y||x - y| \leq 3\}$

p) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (|a + b| - 24)(|a - b| - 24) = 0\}$

q) $S = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

r) $T = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

s) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle 0, 1\rangle\}$

t) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 = 2y^2\}$

u) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow x = 2^y$

v) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 100$

w) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

x) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

y) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow 3 \mid x^2 + y^2$

Úloha 10. Dokážte, že pre každú reláciu R na množine M platí:

a) R je reflexívna práve vtedy, keď $\mathrm{id}_M \subseteq R$

b) R je ireflexívna práve vtedy, keď $\mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

c) R je symetrická práve vtedy, keď $R^{-1} \subseteq R$

d) R je tranzitívna práve vtedy, keď $RR \subseteq R$

e) R je asymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} = \emptyset$

f) R je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_M$

Možno v podúlohách a), c), d) a f) nahradiť $\subseteq$ za $=$?

Úloha 11. Uvažujme relácie $\mid$ (($a \mid b$ znamená, že a delí b) a $<$ (menšíako) definované na kladných celých číslach. Nájdite zložené relácie $<\mid$ a $\mid<$.

Úloha 12. (*) Uvažujme relácie $\mid$ a $<$ na celých číslach. Vyjadrite relácie $\mid<$ a $<\mid$.