

Cvičenie 10A: Relácie ekvivalencie a rozklady

→ **Úloha 1.** Na množine študentov gymnázia definujeme reláciu „byť spolužiakom“. Dokážte, že ide o reláciu ekvivalencie. Čo je rozklad, ktorý určuje?

→ **Úloha 2.** Dokážte, že relácia

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; 5 \mid (a - b)\}$$

je reláciou ekvivalencie na množine \mathbb{Z} . Opíšte, aký rozklad indukuje

- ak ju zúžime na množinu $\{-10, -8, 1, 5, 16, 17, 20, 47, 49\}$,
- na množine \mathbb{Z} .

→ **Úloha 3.** Dokážte, že relácia V z predošlej úlohy je reláciou ekvivalencie. Popíšte rozklad, ktorý indukuje

- na množine $\{-10, -8, 1, 5, 16, 17, 20, 47, 49\}$,
- na množine \mathbb{Z} .

Úloha 4. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo d je relácia \equiv_d definovaná na \mathbb{Z} tak, že

$$a \equiv_d b \Leftrightarrow d \mid (a - b),$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

Poznámka. Táto relácia sa nazýva *kongruencia* a veľmi často sa využíva v teórii čísel. Dáva do vzťahu práve také čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení číslom d . Miesto značenia $a \equiv_d b$ sa skôr používa $a \equiv b \pmod{d}$ (čítame a je kongruentné s b modulo d). Teda napr. $2 \equiv 47 \pmod{5}$, $12 \equiv 0 \pmod{2}$, $22 \equiv 50 \pmod{7}$.

→ **Úloha 5.** Dokážte, že relácia

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in \mathbb{Z}\}$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

→ **Úloha 6.** Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine?

→ **Úloha 7.** Nech R a S sú relácie ekvivalencie na množine M . Uvažujme nasledovné relácie

- $R \cup S$,
- $R \cap S$,
- $R - S$,
- RS ,
- R^{-1} .

Pre každú z podúloh nájdite príklad relácií R, S kedy výsledná relácia je opäť reláciou ekvivalencie; a taktiež príklad relácií R, S , kedy výsledná relácia nie je reláciou ekvivalencie. V prípade, že také relácie R, S nemožno nájsť, dokážte prečo.

Úloha 8. Nech R a S sú tranzitívne relácie. Čo viete povedať o tranzitívnosti relácií

- $R \cap S$,
- $R \cup S$,
- $R - S$,
- RS ,
- R^{-1} ?

Musia byť vždy tranzitívne? Môžu byť pre niektoré voľby R, S tranzitívne a inokedy nie? Nebudú nikdy tranzitívne?

Úloha 9. Ktoré z relácií z predošlých cvičení sú reláciami ekvivalencie? Aký rozklad určujú?

Úloha 10. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na množine X . Dokážte, že aj $\bigcap_{R \in W} R$ je relácia ekvivalencie na množine X .

Na dokončenie princípu inklúzie a exklúzie:

→ **Úloha 11.** Fakulta ponúka 60 voliteľných predmetov. Každý zo 100 prvákov si vyberie práve jeden voliteľný predmet. Koľkými spôsobmi si môžu študenti vybrať predmety, ako každý voliteľný predmet si vybral aspoň jeden študent?