

# Cvičenie 10B: Usporiadania

→ **Úloha 1.** Uvažujme reláciu

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 5)\}$$

na množine  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ide o reláciu usporiadania? Ak nie, ako ju treba upraviť, aby sme dostali usporiadanie? Ak máme usporiadanie, určte najväčšie, najmenšie, minimálne a maximálne prvky vzhľadom na toto usporiadanie.

→ **Úloha 2.** Uveďte príklad relácie usporiadania, ktoré má 2 minimálne a 5 maximálnych prvkov.

→ **Úloha 3.** Uveďte príklad relácie usporiadania, ktoré 3 minimálne a žiadne maximálne prvky.

**Úloha 4.** Pre zadané nezáporné celé čísla  $m, n$  nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať  $n$  maximálnych a  $m$  minimálnych prvkov.

**Úloha 5.** Pri každu z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určte, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

→ a) Relácia  $|$  na  $\mathbb{Z}$ , kde  $a | b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)$  pre všetky  $a, b \in \mathbb{Z}$

→ b) Relácia  $|$  na  $\mathbb{N} - \{1\}$ , kde  $a | b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)$  pre všetky  $a, b \in \mathbb{N}$

c)  $R = \{(a, a); a \in \mathbb{N}\} \cup \{(2a + 1, 2a); a \in \mathbb{N}\}$  (na  $\mathbb{N}$ ),

→ d)  $R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a \leq c \wedge b \leq d\}$ ,

e)  $R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b \leq c + d\}$ ,

f)  $R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b < c + d\}$ ,

g)  $R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b < c + d \vee (a, b) = (c, d)\}$ ,

h) Relácia z predošlej podúlohy zúžená na množinu  $M = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2; a \geq 5 \wedge b \geq 7 \wedge a + b \leq 47\}$

i) (\*)  $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N}); \sum_{a \in A} 2^a \leq \sum_{b \in B} 2^b\}$ , kde  $\mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N})$  označuje množinu konečných podmnožín nezáporných celých čísel.

j)  $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 7a | b \vee a = b\}$

k)  $\preceq = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}$  [Riešenie]

**Úloha 6.** Možno na množine  $\mathbb{N}^2$  definovať úplné usporiadanie?

**Úloha 7.** Z množiny čísel  $M = \{1, 2, \dots, 30\}$  si vyberáme nejaké podmnožiny tak, aby každé dve vybrané čísla boli nesúdeliteľné. Všetky takéto podmnožiny dáme do množiny  $\mathcal{N}$ . Teda

$$\mathcal{N} = \{X \subseteq M; \forall a, b \in X: \text{NSD}(a, b) = 1\}.$$

a) Určte maximálne prvky množiny  $\mathcal{N}$  vzhľadom na usporiadanie  $\subseteq$ . Existuje najväčší prvok?

b) Je pravda, že všetky tieto maximálne prvky majú rovnaký počet prvkov?

c) Určte maximálne prvky vzhľadom na ostré usporiadanie  $\prec$  „mať viac prvkov ako“. Teda  $A \preceq B \Leftrightarrow A = B \vee |A| < |B|$ . Existuje najväčší prvok?

d) Koľko najviac čísel možno vybrať z množiny  $M$  tak, aby každé dve z vybraných čísel boli nesúdeliteľné?

→ **Úloha 8.** Pre neprázdnu množinu  $A \subseteq \mathbb{N}$  označuje  $\max A$  najväčší prvok množiny  $A$  (vzhľadom na klasické usporiadanie  $\leq$ ). Nech  $M = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leq n \leq 47\}$  a nech

$$R = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}); \max A < \max B \vee A = B\}.$$

Dokážte, že  $R$  je usporiadaním na množine  $\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$  a nájdite všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich nájdenných prvkov dokážte.

→ **Úloha 9.** Nájdite príklad uporiadání  $R$  a  $S$  na rovnakej neprázdnej množine  $M$ , aby relácie

$$\text{a) } R \cap S, \quad \text{b) } R \cup S, \quad \text{c) } R - S, \quad \text{d) } RS, \quad \text{e) } R^{-1}?$$

boli / neboli usporiadania. V prípade, že taká voľba  $R, S$  neexistuje, dokážte to.

**Úloha 10.** Nech  $R$  je usporiadanie na množine  $A$  a  $S$  je usporiadanie na množine  $B$ . Rozhodnite, či sú naslednové relácie usporiadaním:

a) relácia  $T$  na množine  $A \times B$ , kde  $(a, b)T(c, d) \Leftrightarrow aRc \wedge bSd$ ,

b) relácia  $U$  na množine  $A \times B$ , kde  $(a, b)U(c, d) \Leftrightarrow aRc \vee bSd$ ,

**Úloha 11.** Nech  $A, I \neq \emptyset$  sú množiny a nech pre každé  $i \in I$  je  $\varphi_i$  usporiadanie množiny  $A$ . Dokážte, že potom aj  $\bigcap_{i \in I} \varphi_i$  je usporiadanie množiny  $A$ . Čo ak sú  $\varphi_i$  úplné usporiadania?

Poznámka.  $\bigcap_{i \in I} \varphi_i = \{x; (\forall i \in I)(x \in \varphi_i)\}$