

Cvičenie 12A: Mohutnosti množín

Úloha 1. Pre nasledovné množiny určte, či sú spočítateľné. Je ich mohutnosť rovná $|\mathbb{N}|$ alebo $|\mathbb{R}|$?

- a) \mathbb{R}
- b) \mathbb{R}^+
- c) $(3, 5)$
- d) $(3, 5)$
- e) množina všetkých konečných podmnožín prirodzených čísel
- f) množina všetkých podmnožín prirodzených čísel
- g) množina všetkých konečných postupností prirodzených čísel
- h) množina všetkých nekonečných postupností prirodzených čísel
 - i) množina všetkých nekonečných nerastúcich postupností prirodzených čísel [Riešenie]
 - j) množina všetkých nekonečných neklesajúcich postupností prirodzených čísel [Riešenie]
- k) množina všetkých injekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- l) množina všetkých surjekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- m) množina všetkých bijekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- n) množina všetkých slov (teda konečných postupností) pozostávajúcich z malých písmen anglickej abecedy a \mathbb{N}
- o) množina všetkých programov napísaných v Pythone
- p) množina všetkých problémov v informatike (v tejto úlohe si treba nejako rozumne definovať, čo je to problém)
- q) (*) ľubovoľná množina disjunktných otvorených intervalov

Úloha 2. Dokážte, že všetky intervaly (a, ∞) , kde a je reálne číslo, majú rovnakú mohutnosť.

Úloha 3. Nech M je množina všetkých matic stupňa 2, tvaru $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Dokážte, že M je spočítateľná.

Úloha 4. Porovnajete mohutnosti množín

- a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a \mathbb{R} ,
- b) (*) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a \mathbb{R}
- c) (*) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (množina všetkých zobrazení z \mathbb{R} do \mathbb{R}) a \mathbb{R}
- d) (*) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- e) množina všetkých rastúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a množina všetkých klesajúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- f) (*) množina všetkých rastúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Úloha 5. Nech A a B sú množiny. Platí nasledovné tvrdenie? Injekcia z A do B existuje práve vtedy, keď existuje surjekcia z B do A .