

## Cvičenie 12B: Grafy

→ **Úloha 1.** Načrtnite neorientovaný graf  $G$  s množinou vrcholov  $2, 3, \dots, 10$ , kde vrcholy  $i$  a  $j$  sú spojené hranou vtedy a len vtedy, ak čísla  $i$  a  $j$  sú súdeliteľné.

- a) Bude graf  $G$  súvislý? Určte počet komponentov súvislosti
- b) Aký je maximálny stupeň vrchola v grafe  $G$ ?
- c) Aký je minimálny stupeň vrchola v grafe  $G$ ?

→ **Úloha 2.** Rozhodnite, či existuje graf, ktorého vrcholy majú stupne:

- a) 4, 3, 2, 2, 1, 0;
- b) 4, 2, 2, 2, 1, 1;
- c) 6, 4, 3, 3, 2, 2, 1;
- d) 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;
- e) 6, 6, 2, 2, 1, 1, 1, 1;
- f) 5, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že v každom jednoduchom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.

→ **Úloha 4.** Nájdite všetky dvojice  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  také, že existuje aspoň jeden  $k$ -regulárny jednoduchý graf rádu  $n$ .

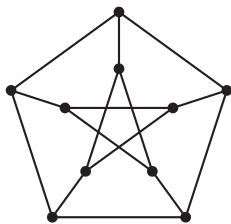
**Úloha 5.** Nech  $n \geq 1$  je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov  $V = \{1, \dots, n\}$ .

**Úloha 6.** Nech  $n, k \geq 1$  sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov  $V = \{1, \dots, n\}$ , ktoré majú práve  $k$  hrán.

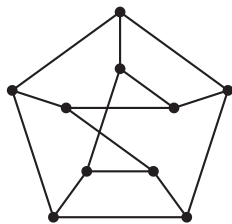
**Úloha 7.** Nájdite všetky navzájom neizomorfné 3-regulárne grafy rádu 6.

→ **Úloha 8.** Zistite, ktoré z nasledujúcich grafov sú izomorfné.

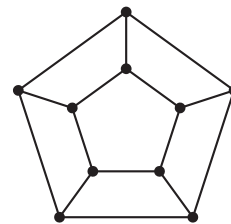
a)



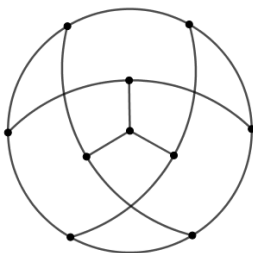
b)



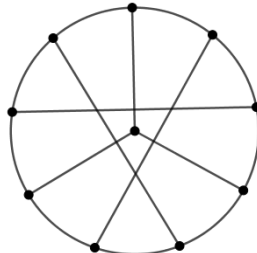
c)



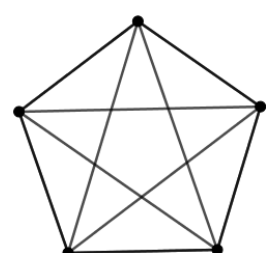
d)



e)



f)



→ **Úloha 9.** Nech  $G = (V, E)$  je jednoduchý graf rádu  $n$  taký, že pre všetky  $v \in V$  platí  $\deg_G(v) \geq (n - 1)/2$ . Dokážte, že graf  $G$  musí byť nutne súvislý.

**Úloha 10.** Nech  $G = (V, E)$  je jednoduchý graf rádu  $n$  taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov  $u, v$  platí  $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$ . Dokážte, že  $G$  musí byť nutne súvislý.

**Úloha 11.** Nech  $G = (V, E)$  je jednoduchý graf rádu  $n$  taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov  $u, v$  platí  $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$ . Dokážte, že  $G$  musí byť nutne súvislý.

→ **Úloha 12.** Nech  $G = (V, E)$  je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Ak pre dvojicu vrcholov  $u, v \in V$  existuje  $u$ - $v$ -sled, tak existuje aj cesta začínajúca v  $u$  a končiaci vo  $v$ .
- b) Ak pre dvojicu vrcholov  $u, v \in V$  existuje  $u$ - $v$ -ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v  $u$  a končiaci vo  $v$ .
- c) Ak pre dvojicu vrcholov  $u, v \in V$  existuje  $u$ - $v$ -sled, tak existuje aj ťah začínajúci v  $u$  a končiaci vo  $v$ .
- d) Ak pre vrchol  $u \in V$  existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez  $u$ , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez  $u$ .
- e) Ak pre vrchol  $u \in V$  existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez  $u$ , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez  $u$ .

→ **Úloha 13.** Podľa riešenia predošlej úlohy navrhňte funkciu v Pythone, ktorá dostane ako parameter  $u$ - $v$ -sled a vypíše na výstup  $u$ - $v$ -cestu.