Cvičenie 13A: Súvislosť a bipartitné grafy

→ **Úloha 1.** Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý. (Komplementárny graf grafu G je taký graf G', pre ktorý platí $V(G') = V(G)$ a $E(G') = \binom{V}{2} - E(G)$.)

→ **Úloha 2.** Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

Úloha 3. Dokážte, že ak graf $G = (V, E)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

Úloha 4. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

Úloha 5. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

Úloha 6. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.

→ **Úloha 7.** Dokážte, že pre každý bipartitný 3-regulárny graf s partíciami A, B platí $|A| = |B|$.

Úloha 8. Nech G je súvislý bipartitný 3-regulárny graf. Dokážte, že ak z grafu G odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 9.** Nech G je súvislý bipartitný 3-regulárny graf. Dokážte, že ak z grafu G odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 10.** Na ľavom brehu rieky stojí prievozník a má na svojej lodičke previezť cez rieku kozu, vlka a seno. Loďka je malá a okrem prievozníka sa do nej vôjde len jeden z uvedených troch pasažierov. Môže prievozník postupne dopraviť cez rieku kozu, vlka i seno, ak nesmie ponechať osamote na brehu ani vlka s kozou ani kozu so senom? Ako sa zmení úloha, ak má prievozník dopraviť cez rieku

1. ešte jednu kozu;
2. ešte jedného vlka?

Úloha 11. Pre kladné celé číslo n uvažujme graf Q_n, ktorého vrcholy tvoria všetky n-členné postupnosti núl a jednotiek. Hranami sú spojené tie postupnosti, ktoré sa líšia práve v jednej pozícii (teda napr. $\{0110, 0100\} \in E(Q_4)$, ale $\{0110, 0101\} \notin E(Q_4)$). V závislosti od čísla n určte:

a) Koľko hrán má graf Q_n?

b) Je graf Q_n súvislý?

c) Je graf Q_n bipartitný?

d) Určte dĺžku najkratšej kružnice grafu Q_n.

e) Určte dĺžku najdlhšej kružnice grafu Q_n.

f) (*) Nájdite najmenšie také číslo d, že medzi každými dvoma vrcholmi grafu Q_n existuje cesta dĺžky najviac d.

→ **Úloha 12.** Posúďte správnosť nasledovného dôkazu.

Pokus o riešenie

Tvrdenie. Každý n-vrcholový graf G s $\delta(G) \geq 3$ obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n. Graf s minimálnym stupňom vrchola 3 musí mať aspoň 4 vrcholy. Ak $n = 4$, tak $G = K_4$ (úplný graf na 4 vrcholov), ktorý obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké n a dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Podľa indukčného predpokladu, n-vrcholový graf G obsahuje kružnicu dĺžky 4. Ak do grafu G pridáme nový vrchol stupňa aspoň 3, tak dostaneme $(n+1)$-vrcholový graf G'. Nový graf G' má tiež minimálny stupeň aspoň 3 (lebo sme len pridali hrany) a stále obsahuje kružnicu dĺžky 4. Tvrdenie teda platí aj pre $n+1$, čím je dôkaz indukciou hotový. $\square$

→ **Úloha 13.** Na večierku sa stretlo $3n-1$ ľudí, $n \in \mathbb{N}^+$. Niektoré dvojice ľudí sa medzi sebou poznajú (vzťah poznať sa je symetrický). Dokážte, že v každej takejto situácii existuje n navzájom disjunktných párov s vlastnosťou, že buď sa všetky páry medzi sebou poznajú, alebo sa žiaden z párov medzi sebou nepozná.

Úloha 14. Dokážte, že vrcholy každého grafu G, ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.