

Cvičenie 13B: Stromy a Eulerovské grafy

Úloha 1. Koľko najmenej hrán môže obsahovať súvislý n -vrcholový graf?

Definícia 1. *Strom* je súvislý acyklický graf (teda neobsahuje kružnicu).

Definícia 2. *List* stromu je vrchol stua 1.

→ **Úloha 2.** Dokážte, že každý netriviálny strom má aspoň dva listy.

Úloha 3. Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na n vrcholoch?

→ **Úloha 4.** Dokážte, že každý strom T má aspoň $\Delta(T)$ listov.

→ **Úloha 5.** Dokážte, že strom na n vrcholoch má práve $n - 1$ hrán.

→ **Úloha 6.** Dokážte, že každý súvislý graf má kostru.

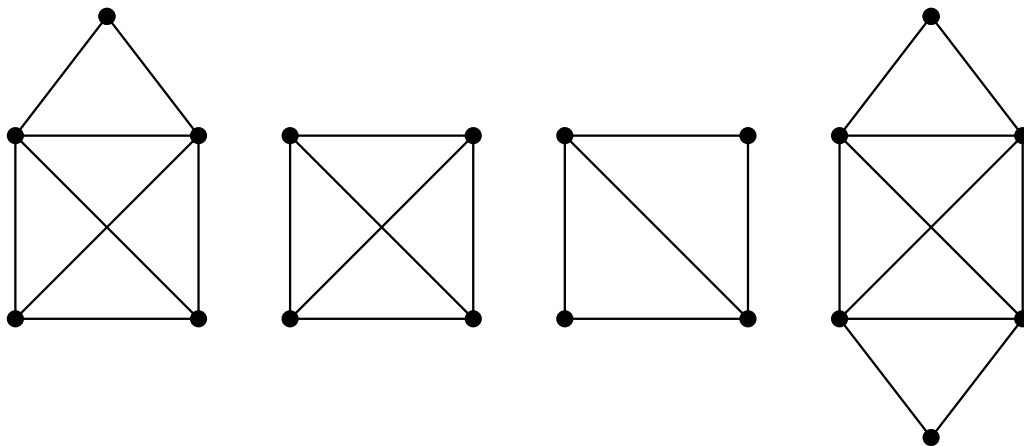
→ **Úloha 7.** O strome T vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,
- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom T listov?

Úloha 8. Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať v_1, v_2, \dots, v_n tak, že pre každé $i \geq 2$ má vrchol v_i práve jedného suseda v množine $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$.

→ **Úloha 9.** Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



→ **Úloha 10.** Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

→ **Úloha 11.** Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf K_n je eulerovský.

Úloha 12. Basketbalového tréningu sa zúčastňuje 17 hráčov. Tréning pozostáva z viacerých kôl. V prvom kole hrajú proti sebe dva 5-členné tímy. Po každom kole je jedna z päťíc vymenená piatimi hráčmi, ktorí toto kolo nehrali. Tí budú v ďalšom kole hrať proti päťici čo ostala. Žiaden hráč nehraje tri kolá po sebe. Je možné zostaviť rozpis turnaja tak, aby ľubovoľná kombinácia dvoch 5-členných tímov hrala práve raz proti sebe?

Začiatok takého rozpisu môže vyzeráť nasledovne:

1. kolo: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ vs. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$
2. kolo: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ vs. $\{11, 12, 13, 14, 15\}$
3. kolo: $\{6, 8, 9, 16, 17\}$ vs. $\{11, 12, 13, 14, 15\}$ (teraz sme museli stiahnuť tím $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, lebo nemôže hrať tri zápasy po sebe, tímy nie sú fixné, takže hráč 6 kludne môže hrať s inými hráčmi ako v 1. kole)
4. kolo: $\{6, 8, 9, 16, 17\}$ vs. $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ (teraz sme museli stiahnuť tím $\{11, 12, 13, 14, 15\}$)