Riešenia 2. sady domácich úloh

Úloha 1

Máme 3 tyče označené A, B, C a $2n$ diskov, ktoré sú všetky umiestnené na tyči A a v poradí zhora nadol sú očíslované $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$. V jednom ťahu môžeme vziať vrchný disk z ľubovoľnej tyče a umiestniť ho na vrch ľubovoľnej inej tyče, avšak nesmieme pritom položiť disk s väčším číslom na disk s menším číslom. (Disky s rovnakými číslami na seba môžeme ukladať.) Dokáže, že pomocou $2^{n+1} - 2$ ťahov vieme všetky disky z tyče A premiestniť na tyč B.
Bonus. *(1 bod)* Napíšte program, ktorý zo vstupu načíta číslo n a vypíše postupnosť ťahov, ktorá presunie disky z tyče A na tyč B. Každý ťah bude v samostatnom riadku, ktorý bude tvaru `XY`, ktorý znamená, že z tyče `X` presúvame disk na tyč `Y`.

Matematickou indukciou dokážeme, že $2n$ diskov vieme premiestniť z jednej tyče na druhú využitím $2^{n+1} - 2$ ťahov. Pre $n = 0$ nemáme žiadne disky, čiže na vyriešenie hlavolamu nám stačí 0 ťahov. Keďže $2^1 - 2 = 0$, tak bázu máme dokázanú.

Nech k je prirodzené číslo. Prepokladajme, že $2k$ diskov $1, 1, 2, 2, \ldots, k, k$ vieme premiestniť z jednej tyče na druhú na $2^{k+1} - 2$ ťahov (indukčný predpoklad). Dokážeme, že potom vieme aj $2(k + 1)$ diskov $1, 1, 2, 2, \ldots, k + 1, k + 1$ premiestniť z jednej tyče na druhú, bez ujmy na všeobecnosti z A na B. To spravíme nasledovne:

1. Na základe indukčného predpokladu presunieme disky $1, 1, 2, 2, \ldots, k, k$ z tyče A na tyč C pomocou $2^{k+1} - 2$ ťahov.
2. Presunieme disk jeden disk $k + 1$ z tyče A na tyč B a rovnako aj druhý. Vykonali sme 2 ťahy.
3. Podľa indukčného predpokladu presunieme disky $1, 1, 2, 2, \ldots, k, k$ z tyče C na tyč B pomocou $2^{k+1} - 2$ ťahov.

Všetky vykonané ťahy sú korektné. Disky $k + 1$ nás v krokoch 1. a 3. netrápia, keďže na ne môžeme uložiť všetky ostatné. Ukázali sme tak, že vieme presunúť všetky disky z tyče A na tyč B, pričom počet použitých ťahov je

$$(2^{k+1} - 2) + 2 + (2^{k+1} - 2) = 2 \cdot 2^{k+1} - 2 = 2^{(k+1)+1} - 2,$$

čo je presne to, čo sme chceli dokázať. Dôkaz indukciou je tak hotový.

Poznámka. V tomto riešení sme vlastne dokazovali silnejšie tvrdenie. Miesto presúvania diskov vyslovene z tyče A na tyč B sme dokazovali, že vieme presúvať medzi ľubovoľnými dvomi tyčami. To je technicky potrebné, keď chceme v indukčnom kroku využiť indukčný predpoklad na presun diskov z tyče A na C. Ak máme v indukčnom predpoklade len presun z A na B, tak to nemôžeme len tak použiť.

Bonus. Spomenutý problém je výrazný, keď sa pustíme do programovania. Matematikcká indukcia zodpovedá rekurzii v programovaní. Teda ak chceme previesť naše riešenie do programu, najpriamejšie bude napísať rekurzívnu funkciu. Ak by sme však išli programovať funkciu `hanoi(n)`, ktorá vypíše postuonosť ťahov presúvajúcu disky z A na B, tak tú nebudeme môcť použiť na presun z A na C. Preto si funkciu zovšeobecníme tak, že jej pridáme argumenty `start`, `goal`, určujúce z ktorej tyče na ktorú chceme disky presúvať. Takto vieme pridať aj argument `mid` pre zvyšnú tyč – síce sa dá jednoznačne určiť z hodnôt `start`, `goal`, ale je pohodlnejšie sa toho ušetriť.

Budeme teda programovať funkciu `hanoi(n, start, goal, mid)`, ktorá presunie disky $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ z tyče `start` na tyč `goal` za pomoci tyče `mid`.

```
def hanoi(n, start, goal, mid):
    if n > 0:
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z start na mid
        hanoi(n - 1, start, mid, goal)
        # Presunieme dva disky n z start na goal
        print(start + goal)
        print(start + goal)
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z mid na goal
        hanoi(n - 1, mid, goal, start)

n = int(input())
hanoi(n, 'A', 'B', 'C')
```

Porovnanie rekurzie a matematickej indukcie. Na tejto úlohe si môžeme pekne všimnúť súvis medzi rekurziou a matematickou indukciou. Akurát tento program nám nič nehovorí o počte ťahov. Aby sme dokázali, že spraví $2^{n+1} - 1$, tak potrebujeme už matematickú indukciu.

Kde spraviť bázu? V úlohe nebolo jasne zadané, pre ktoré n máme tvrdenie dokazovať (či pre $n \geq 0$ alebo pre $n \geq 1$). Náš dôkaz aj program uvažuje $n \geq 0$. Všimnite si, že prípad uvažovanie 0 vôbec nie je problematické. Ak by sme nulu nechceli uvažovať, tak by sem v báze pre $n = 1$ vykonali dva priame ťahy. A program by vyzeral nasledovne:

```
def hanoi(n, start, goal, mid):
    if n == 1:
        print(start + goal)
        print(start + goal)
    else:  # Alebo if n > 1:
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z start na mid
        hanoi(n - 1, start, mid, goal)
        # Presunieme dva disky n z start na goal
        print(start + goal)
        print(start + goal)
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z mid na goal
        hanoi(n - 1, mid, goal, start)

n = int(input())
hanoi(n, 'A', 'B', 'C')
```

Dokazovanie pre $n \geq 0$ má výhodu v tom, že báza je jednoduchšia. Aj program je o niečo stručnejší.

Úloha 2

Výber niekoľkých množín nazývame *podozrivým*, pokiaľ niektorá z vybraných množín je podmnožinou inej vybranej množiny. Nájdite najväčšie také celé číslo k, pre ktoré možno vybrať k navzájom rôznych podmnožín množiny $\{1,2,3,4,5\}$ tak, aby tento výber nebol podozrivý. Vaše tvrdenie dokážte.
Čiastkové body viete získať aj za korektné dôkazy nejakých dolných či horných odhadov na hľadané najväčšie k (teda, že je isto menšie / väčšie ako nejaké číslo).

Ukážeme, že najväčšie také k je 10.

Dolný odhad (konštrukcia). Ukážeme, že existuje výber 10 podmnožín, ktorý nie je podozrivý. Ide napr. o výber všetkých 2-prvkových podmnožín, ktorých je $\binom{5}{2} = 10$. Overenie, že tento výber nie je podozrivý ľahko spravíme aj manuálne. Avšak vyplýva to z toho, že ak máme dve rôzne množiny A, B, pre ktoré platí $A \subseteq B$, tak B musí mať ostro viac prvkov ako A. To pri iba dvojprkových množinách nemôže nastať.

Horný odhad. Teraz ukážeme, že každý výber 11 podmnožín je podozrivý. Teda že pre každý výber 11 podmnožín množiny $\{1,2,3,4,5\}$ existujú dve rôzne podmnožiny, z ktorých je jedna podmnožinou druhej. Uvažujme nasledovné rozdelenie všetkých podmnožín na 10 skupín:

1. $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}$;
2. $\{2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{2,3,4,5\}$
3. $\{3\}, \{3,4\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5\}$;
4. $\{4\}, \{4,5\}, \{4,5,1\}, \{4,5,1,2\}$;
5. $\{5\}, \{5,1\}, \{5,1,2\}, \{5,1,2,3\}$;
6. $\{1,3\}, \{1,3,4\}$;
7. $\{2,4\}, \{2,4,5\}$;
8. $\{3,5\}, \{1,3,5\}$;
9. $\{4,1\}, \{1,2,4\}$;
10. $\{5,2\}, \{2,3,5\}$.

Ľahko overíme pre každú zo skupín platí, že ak vyberieme hocijaké dve množiny z nej, tak jedna je podmnožinou druhej. Keďže máme 11 vybraných podmnožín, ale len 10 skupín, tak podľa Dirichletovho princípu sme z niektorej skupiny vybrali dve množiny – na základe predošlej vety jedna je podmnožinou druhej.

Poznámka. Keď si povieme, že chceme druhú časť dokázať Dirichlerovým princípom, tak to znamená, že chceme všetkých 32 podmnožín rozdeliť do skupín (holubníkov). Nakoľko chceme, aby nám Dirichletov princíp povedal, že existujú dve množiny, z ktorých jedna je podmnožinou druhej, tak tieto skupiny musíme tvoriť podľa tejto vlastnosti – hocijaké dve podmnožiny vyberieme, tak jedna musí byť pdomnožinou druhej. Vyhovujúce rozdelenie tak vieme nájsť skúšaním, kedy postupne pridávame množiny do skupín sledujúc túto vlastnosť.

Úloha 3

Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \cap \mathcal{P}(A \cup C)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) \supseteq \mathcal{P}(A \cup B) \cap \mathcal{P}(A \cup C)$

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenia dokážte z definície.

Časť a)

Pri dôkaze využijeme nasledovné tvrdenie: Pre ľubovoľné množiny X, Y, Z platí:

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \subseteq Y \cup Z. \tag{1}$$

Dôkaz. Nech platí $X \subseteq Y$. Dokážeme, že potom platí $X \subseteq Y \cup Z$. Pre ľubovoľné a platí

$$a \in X \overset{X\subseteq Y}{\Rightarrow} a \in Y \Rightarrow (a \in Y \vee a \in Z) \Rightarrow a \in Y \cup Z.$$

Teda platí $(\forall a)(a \in X \Rightarrow a \in Y \cup Z)$, preto platí $X \subseteq Y \cup Z$. □

Dokážeme, že tvrdenie a) platí. Uvažujme prvok X, ktorý patrí do pravej strany rovnice, teda platí

$$X \in \mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)). \tag{2}$$

Na základe definície zjednotenia potom platí

$$X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C) \tag{3}$$

a podľa definície prieniku máme

$$X \in \mathcal{P}(A) \vee (X \in \mathcal{P}(B) \wedge X \in \mathcal{P}(C)). \tag{4}$$

Teraz využijeme definíciu potenčnej množiny, čím máme

$$X \subseteq A \vee (X \subseteq B \wedge X \subseteq C). \tag{5}$$

Dostali sme sa k tomu, že nám platí disjunkcia dvoch tvrdení. Preto ďalej rozdelíme dôkaz na dve vetvy podľa toho, ktoré platí.

Nech platí

$$X \subseteq A$$

Na základe (1) potom platí $X \subseteq A \cup B$ a aj $X \subseteq A \cup C$, teda máme

$$X \subseteq A \cup B \wedge X \subseteq A \cup C.$$

Nech platí

$$X \subseteq B \wedge X \subseteq C$$

Na základe (1) potom platí

$$X \subseteq B \cup A \wedge X \subseteq C \cup A,$$

čo vieme prepísať na

$$X \subseteq A \cup B \wedge X \subseteq A \cup C,$$

keďže prienik je komutatívny, čo priamo vyplýva z komutatívnosti spojky $\wedge$.

Tým pádom dostávame, že plat
$$X \subseteq A \cup B \wedge X \subseteq A \cup C,$$
keďže sme toto tvrdenie dostali v oboch vetvách. Teraz už len využijeme definíciu potenčnej množiny
$$X \in \mathcal{P}(A \cup B) \wedge X \in \mathcal{P}(A \cup C)$$
a prieniku a máme
$$X \in \mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C).$$
Teda sme dokázali, že
$$(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)). \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C)),$$
teda platí $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C)$.

Časť b)

Ukážeme, že tvrdenie neplatí. Nech $A = \{1\}$ a $B = C = \{2\}$. Potom
$$\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$
a
$$\mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$
Keďže sa množina $\{1, 2\}$ nachádza v pravej strane, ale nenachádza sa v ľavej strane, tak $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) \not\supseteq \mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C)$.

Úloha 4

> Päť družstiev hrá systémom každý s každým jeden zápas. Koľko rôznych rozpisov zápasov existuje? (Rozpisom zápasov rozumieme poradie hrania zápasov, pričom je jedno, či je v jednom zápase uvedené družstvo A vs. družstvo B alebo naopak.)

Všetkých možných zápasov je $\binom{5}{2} = 10$, keďže nemôžeme vybrať proti sebe rovnaké družstvá a nezáleží nám na ich poradí. Týchto 10 zápasov teraz chceme zoradiť do rozpisu, teda spraviť ich permutáciu, tých teda je
$$\binom{5}{2}! = 10!.$$