2. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **štvrtok 27. 10., 12:00**

Úloha 1. *(1,5 boda)* Nech A je podmnožina prirodzených čísel. *Supermnožinou* množiny A nazveme množinu všetkých nadmnožín množiny A v univerze prirodzených čísel. Budeme ju označovať $\mathcal{S}(A)$. Teda

$$\mathcal{S}(A) = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq X\}.$$

Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{S}(A \cap B) \subseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$,

b) $\mathcal{S}(A \cap B) \supseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$.

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenie dôkážte z definície.

Úloha 2. *(1,5 boda)* Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, aby sme mali istotu, že medzi vybranými číslami sú dve také, ktorých súčet je deliteľný piatimi?

Úloha 3. *(1,5 boda)* Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 1$ platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}.$$

Úloha 4. *(0,5 boda)* Anglická abeceda obsahuje 26 písmen. Koľko existuje trojpísmenových slov z písmen anglickej abecedy, v ktorých je prvé písmeno rôzne od zvyšných dvoch (druhé a tretie môžu byť rovnaké)? Pod slovom myslíme trojprvkovú postupnosť písmen. Vašu odpoveď zdôvodnite (stačí stručne, neformálne).