

3. sada domácich úloh

Termín odovzdania: štvrtok 30. 11. 2023, 12:00

Úloha 1. (3,5 boda) Pre účely tejto úlohy za *slovo* považujeme ľubovoľnú postupnosť písmen. Písmeno je v slove *šťastné*, pokiaľ sa v ňom nachádza na siedmich za sebou idúcich miestach a nikde inde. Napr. *a* je šťastné v slove *bcaaaaaadcdcc*, ale *a* nie je šťastné v slovách *bacadagafaaha* či *baaaaaaacccbab*. Určte, koľko existuje

- (0,5 b) slov dĺžky 9 zložených z písmen a, b, c, d
- (0,5 b) slov dĺžky 16 zložených z písmen a, b, c, d, e, f, g, h, i, ktorých písmená sú zoradené abecedne;
- (1 b) slov dĺžky 20 zložených z písmen a, b, c, d, e, f, ktoré obsahujú práve dve šťastné písmená;
- (1,5 b) slov dĺžky 60 zložených z písmen anglickej abecedy (ktorých je 26), ktoré obsahujú každé písmeno aspoň raz.

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite. Počty v úlohách okrem d) sú malé nie preto, aby ste nahradili matematické riešenie vygenerovaním všetkých možností pomocou počítača, ale aby ste si tým vedeli pomôcť a kvôli bonusu. Vaše zdôvodnenia musia byť efektívne ručne overiteľné. V podúlohe d) môžete vo výsledku uviesť jednu sumu. Zvyšné výsledky uveďte v uzavretom tvare (teda bez súm, troch bodiek a podobných zdĺhavých vecí).

Bonus (2 body) Pre každú z podúloh a), b), c) predošlej úlohy napíšte program (príp. funkciu), ktorý vypíše do konzoly všetky slová z príslušnej podúlohy, do každého riadku jedno slovo.

Program (funkcia) nemá žiaden vstup (ak chcete mať vo funkcii parametre, nastavte im default hodnoty). Plný počet bodov dostanú programy, ktoré sú efektívne a o ktorých možno priamo zistiť, koľko možností vypíšu – ideálne vaše programy budú kopírovať vaše matematické riešenia z 1. úlohy. Správne programy nespĺňajúce tieto požiadavky nemusia byť ohodnotené plným počtom bodov.

Úloha 2. (1,5 boda) V závislosti od nezáporného celého čísla $n \in \mathbb{N}$ vypočítajte sumu

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^{k+1}}{n+1-k} \binom{n}{k}.$$