Riešenia 3. sady domácich úloh

Úloha 1

(BONUS, 2 body) Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B.

a) Dokážte, že ff^- je reláciou ekvivalencie na množine A.

b) Uveďte príklad zobrazenia $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pre ktoré rozklad množiny $\mathbb{Z}$ indukovaný reláciou ekvivalencie ff^- je

$$\{\{a, -a\};\ a \in \mathbb{N}\}.$$

Správnosť časti b) stačí stručne neformálne zdôvodniť.

Poznámka. f^- značí inverznú reláciu. Relácie skladáme v poradí, že ff^- je naozaj relácia na A.

V časti a) ukážeme, že relácia ff^- je reflexívna, symetrická a antisymetrická. Treba si pritom dať pozor, že f^- vo všeobecnosti nemusí byť zobrazenie, teda zápis $f^-(a)$ nie je úplne korektný. Napr. ak máme zobrazenie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že $f(x) = x^2$ pre všetky $x \in \mathbb{Z}$, tak čo je $f^-(4)$? Tento zápis môžeme chápať ako alternatívu k zápisu $f^-[a]$, čo je množina všetkých prvkov b, pre ktoré platí $(a, b) \in f^-$. Teda v našom príklade by platilo $f^-(4) = \{-2, 2\}$, $f(0) = \{0\}$ a $f(-7) = \emptyset$.

Reflexívnosť. Pre ľubovoľný prvok $a \in A$ platí:

1. $(a, f(a)) \in f$ (keďže f je všade definovaná)
2. $(f(a), a) \in f^-$ (z definície inverznej relácie
3. $(a, a) \in ff^-$ kvôli 1. a 2. (z definície zloženej relácie)

Symetrickosť. Pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí:

1. Nech $(a, b) \in ff^-$
2. $(a, c) \in f \wedge (c, b) \in f^-$ pre nejaké $c \in B$ (z definície skladania relácií)
3. $(b, c) \in f \wedge (c, a) \in f^-$ (z definície inverznej relácie a komutatívnosti $\wedge$)
4. $(b, a) \in ff^-$ (z definície skladania relácií

Čiže sme ukázali, že ak $(a, b) \in ff^-$, tak aj $(b, a) \in ff^-$.

Tranzitívnosť Pre ľubovoľné $a, b, c \in A$ platí:

1. Nech $(a, b) \in ff^- \wedge (b, c) \in ff^-$.
2. $(a, d) \in f \wedge (d, b) \in f^- \wedge (b, e) \in f \wedge (e, c) \in f^-$ pre nejaké $d, e \in B$
3. $(a, d) \in f \wedge (b, d) \in f \wedge (b, e) \in f \wedge (e, c) \in f^-$ (prepis cez inverznú reláciu)
4. $d = e$, lebo $(b, d) \in f$ aj $(b, e) \in f$ a f je jednoznačná relácia
5. $(a, d) \in f \wedge (d, c) \in f^-$ (z 3. sme ponechali len prvý a posledný člen a nahradili sme e za d na základe 4.)

6. $(a, c) \in ff^-$ (z definície skladania relácií)

Časť b) Napr. zobrazenie $f(x) = |x|$. S čím je v relácii ff^- číslo a? Cez f sa dostaneme z a do $|a|$. Potom cez f^- sa dostaneme do takých čísel b, pre ktoré platí $|b| = |a|$, čiže do a, $-a$. Čiže naozaj $ff^-[a] = \{-a, a\}$.

Rovnako fungujú aj zobrazenia $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$ alebo aj nejaké divokejšie.

Iné riešenie Dôkazy v časti a) boli relatívne bezmyšlienkovité, založené na prepisovaní výrokov cez príslušné definície. Tieto dôkazy možno zjednodušiť, ak si uvedomíme, ako vlastne relácia ff^- funguje, čo sme aj naznačili v časti b). Prepíšeme si

$$(a, b) \in ff^- \Leftrightarrow (\exists c \in B)((a, c) \in f \wedge (c, b) \in f^-) \Leftrightarrow (\exists c \in B)((a, c) \in f \wedge (b, c) \in f)).$$

V reči zobrazení to znamená $f(a) = c \wedge f(b) = c$ a tu premennú c nepotrebujeme, lebo to nám vlastne hovorí to isté ako $f(a) = f(b)$, teda

$$(a, b) \in ff^- \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Pomocou tohto vzťahu sú dôkazy veľmi priame, lebo všetky tri vlastnosti sa priamo zdedia z vlastností rovnosti. Uvedieme dôkaz pre tranzitivitu, zvyšné sú podobné:

$$(a, b) \in ff^- \wedge (b, c) \in ff^- \Rightarrow f(a) = f(b) \wedge f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in ff^-.$$

Úloha 2

(2 body) Nech M je množina všetkých neprázdnych podmnožín prirodzených čísel, teda $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$. Na množine M definujeme reláciu $\preceq$ tak, že pre každé $A, B \in M$ platí

$$A \preceq B \Leftrightarrow [A = B \vee (\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)].$$

Dokážte, že $(M, \preceq)$ je usporiadaná množina a určte všetky jej minimálne, maximálne, najväčšie a najmenšie prvky. Správnosť nájdených prvkov dokážte.

Ak máte problémy s určením prvkov, tak za stratu najviac 0,5 boda môžete požadované prvky určiť v prípade, keď miesto množiny M máme množinu $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) - \{\emptyset\}$.

Pred tým, než sa pustíme do dokazovania, je fajn si uvedomiť, čo nám vlastne táto relácia hovorí. Vyjadrené slovne, $A \preceq B$ platí práve vtedy keď $A = B$ alebo všetky prvky množiny A sú menšie rovné od všetkých prvkov množiny B. Táto slovná interpretácia môže uľahčiť pochopiteľnosť dôkazov a ušetriť nás formálnych zápisov. To spravíme aj my – uvedieme aj riešenie zapísané viac slovne. Avšak aj keď riešime slovne, stále si musíme dávať pozor na formálne pravidlá, aby sme neprehliadli nejaké dôležité detaily. Nad potenciálnymi problémami sa vieme zamyslieť aj pred riešením úlohy.

V zadaní máme, že pracujeme len s neprázdnymi množinami. Prečo? Bola by uvedená relácia usporiadaním aj ak by sme pridali do M prázdnu množinu? Odpoveď je, že nie – nebola by antisymetrická, ani tranzitívna – nájdenie protipríkladov prenechávame vám. Preto si musíme dať pozor na to, aby sme niekde v našom dôkaze túto neprázdnosť využili.

Reflexínvosť. Keďže pre ľubovoľnú množinu A platí $A = A$, tak platí aj $A = A \vee$ „niečo", preto $A \preceq A$.

Antisymetrickosť. Sporom:

1. Nech platí $A \preceq B \wedge B \preceq A \wedge A \neq B$ pre nejaké $A, B \in M$.
2. $[A = B \vee (\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)] \wedge [A = B \vee (\forall b \in B)(\forall a \in A)(b \leq a)] \wedge A \neq B$ (z definície $\preceq$)
3. $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b) \wedge (\forall b \in B)(\forall a \in A)(b \leq a)$ – Keďže $A \neq B$, tak v hranatých zátvorkách neplatí $A = B$, čiže musí platiť druhý člen.
4. Keďže $A \neq B$, tak BUNV existuje prvok x, taký, že $x \in A \wedge x \notin B$ (ešte je tu druhá možnosť, že by x bolo v B a nie v A, ale tá je analogická, preto to BUNV – bez ujmy na všeobecnosti)
5. Nech y je prvok z B (keďže $B \neq \emptyset$, tak si môžeme nejaký prvok B vziať.
6. $x \neq y$ lebo $x \notin B$ a $x \in B$
7. $x \leq y$ lebo $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)$ z 3. a $x \in A$, $y \in B$.
8. $y \leq x$ lebo $(\forall b \in B)(\forall a \in A)(b \leq a)$ z 3. a $x \in A$, $y \in B$.
9. $x = y$ (z antisymetrickosti $\leq$) – a to je spor so 6.

Antiysmetrickosť slovne. Pre $A = B$ antisymetrickosť zjavne platí, tak uvažujme len $A \neq B$ a predpokldajme, že $A \preceq B$ a $B \preceq A$. Keďže $A \preceq B$ a $A \neq B$, tak všetky prvky A sú menšie rovné ako všetky prvky B. Špeciálne, keďže A, B sú **neprázdne**, tak ak si vyberime nejaké prvky $a \in A$, $b \in B$, tak pre ne platí $a \leq b$. Na základe $B \preceq A$ tak podobne dostaneme, že pre tie isté prvky a, b platí $b \leq a$. Čiže máme $a \leq b$ a tiež $b \leq a$, teda $a = b$. A to platí pre akékoľvek prvky $a \in A$, $b \in B$. Čiže sme dostali, že každý prvok množiny A sa rovná každému prvku množiny B. To znamená, že $A = B$ (dokonca to má o niečo silnejší záver, že obe množiny A, B sú jednoprvkové). A to je to, čo sme chceli dokázať. (Alebo spor, ak dokazujeme sporom.)

Tranzitívnosť. Nech $A, B, C \in M$. Predpokladajme, že platí

$$A \preceq B \wedge B \preceq C \tag{1}$$

Ak $A = B$, tak dostávame $A \preceq A \wedge A \preceq C$, čiže platí $A \preceq C$. Podobne ak $B = C$, tak priamo dostávame $A \preceq C$ a máme, čo sme chceli dokázať. Preto vo zvyšku dôkazu budeme predpokladať, že $A \neq B$ a $B \neq C$. Prepíšeme teda (1) podľa definície $\preceq$

$$[A = B \vee (\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)] \wedge [B = C \vee (\forall b \in B)(\forall c \in C)(b \leq c)].$$

S využitím, že $A \neq B$ a $B \neq C$ to vieme zjednodušiť na

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b) \wedge (\forall b \in B)(\forall c \in C)(b \leq c), \tag{2}$$

teda platí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b), \tag{3}$$

$$(\forall b \in B)(\forall c \in C)(b \leq c). \tag{4}$$

Pripomenieme, že chceme dokázať, že $A \preceq C$, na čo nám stačí ukázať, že $(\forall a \in A)(\forall c \in C)(a \leq c)$. Zoberme si teda ľubovoľné prvky $a \in A$, $c \in C$. Keďže $B \neq \emptyset$, tak si vieme zobrať nejaký (fixný) prvok množiny B, označme ho b. Podľa (3) platí $a \leq b$ a podľa (4) zas platí $b \leq c$. Na základe tranzitívnosti $\leq$ máme $a \leq c$, čo platí pre všetky $a \in A$, $c \in C$ – teda sme dokázali

$$(\forall a \in A)(\forall c \in C)(a \leq c),$$

z čoho vyplýva, že $A \preceq C$.

Tranzitívnosť slovne. Uvedieme dôkaz len pre prípad $A \neq B \wedge B \neq C$. Nech $A \preceq B \wedge B \preceq C$. To znamená, že všetky prvky A sú menšie ako všetky prvky z B a všetky prvky B sú menšie ako všetky prvky C. Ak si teda vezmeme nejaký prvok $a \in A$, tak on bude menší rovný od nejakého prvku $b \in B$ – ktorý môžeme uvažovať, keďže B je **neprázdne** – a tento prvok b bude zas menší rovný od hocijakého prvku z C. Teda nech si zvolíme hocijaké prvky $a \in A$, $c \in C$, tak vieme takto pre ne dostať, že $a \leq c$. Teda platí $A \preceq C$.

Tranzitívnosť cez formálne prepisovanie výrokov. Opäť uvedieme len dôkaz pre prípad $A \neq B \wedge B \neq C$

$$\begin{array}{c l}
A \preceq B \wedge B \preceq C & \\
\Updownarrow & \\
(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b) \wedge (\forall b \in B)(\forall c \in C)(b \leq c)) & \\
\Updownarrow & \text{Opakované využitie tautológie } (\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \wedge (\forall x)b(x)) \\
(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in C)[(a \leq b) \wedge (b \leq c)] & \\
\Downarrow & \text{tranzitívnosť } \leq \\
(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in C)(a \leq c) & \\
\Downarrow & \text{Keďže } B \neq \emptyset \text{, dosadíme za } b \text{ nejaký prvok z } B \leq \\
(\forall a \in A)(\forall c \in C)(a \leq c) & \\
\Updownarrow & \\
A \preceq C &
\end{array}$$

Najviac problematický je tu predposledný krok. Hoci $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in C)(a \leq c)$ vyzerá skoro ako to, čo sme už chceli dostať, potrebujeme sa zbaviť kvantifikátora $(\forall b \in B)$. To však nemôžeme spraviť, ak $B = \emptyset$.

Určenie prvkov

Najmenší prvok je $\{0\}$, lebo pre každú množinu $B \in M$ platí $(\forall b \in B)(0 \leq b)$, teda aj $(\forall a \in \{0\})(\forall b \in B)(a \leq b)$, čo znamená, že $\{0\} \preceq B$.

Minimálny prvok je iba $\{0\}$, nakoľko je to najmenší prvok.

Maximálne prvky sú práve všetky nekonečné množiny.

Najskôr ukážeme, že všetky nekonečné množiny sú maximálne. Nech A je nekonečná množina z M a nech B je iná množina z B. Vezmime si prvok $b \in B \neq \emptyset$. Existuje konečne veľa prirodzených čísel, ktoré sú menšie rovné b. Keďže množina A je nekonečná, tak isto obsahuje prvok, ktorý je väčší ako b, preto neplatí $A \preceq B$. Teda sme ukázali, že pre nekonečnú množinu A platí $(\forall B \in M)(B \neq A \Rightarrow A \npreceq B)$, čo je jedna z definícií maximálneho prvku.

Ešte potrebujeme ukázať, že iné prvky maximálne nie sú. Nech A je konečná množina z M. Keďže A je konečná, tak má najväčší prvok (pri bežnom usporiadaní $\leq$) – označme si ho n. Potom ale zjavne platí $A \prec \{n + 1\}$, čiže A nie je maximálny prvok (lebo sme našli od neho ostro väčší prvok).

Najväčší prvok neexistuje, lebo máme aspoň dva maximálne prvky – napr. párne a nepárne čísla. (V skutočnosti maximálnych prvkov máme nekonečne veľa.)

Úloha 3

(2 body) Uvažujme nasledujúce množiny obsahujúce nekonečné postupnosti celých čísel:

a) A obsahuje práve tie postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré platí $a_n^2 + a_{n+1}^2 = 2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$;

b) B obsahuje práve tie postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré platí $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

O každej z množín A, B rozhodnite, či je spočítateľná. Vaše tvrdenia dokážte.

Podúloha a)

Rovnosti $a_n^2 + a_{n+1}^2 = 2$ vyhovujú v celých číslach nasledovné dvojice (a_n, a_{n+1}): $(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)$. Špeciálne z toho dostávame, že $a_n \in \{-1, 1\}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Čiže množina A obsahuje len postupnosti zložené z čísel -1 a 1. A ľahko vidíme, že ich obsahuje všetky, takže A je vlastne množina všetkých nekonečných postupností zložených z čísel -1 a 1. Zobrazenie, ktoré v každej takej postupnosti zmení všetky čísla -1 na 0 je zjavne bijekciou z A do množiny všetkých nekonečných binárnych postupností, ktorá je nespočítateľná. Preto je množina A **nespočítateľná**.

Podúloha b)

Každá postupnosť z B je jednoznačne určená svojimi prvými tromi členmi a_0, a_1, a_2, nakoľko pre všetky $n \geq 3$ platí $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}$. Preto zobrazenie $f: B \to \mathbb{Z}^3$, ktoré postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ priradí (a_0, a_1, a_2), je bijekcia.

Teraz ukážeme, že množina $\mathbb{Z}^3$ je spočítateľná. Pre $i \in \mathbb{N}$, nech M_i je množina trojíc $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, pre ktoré platí $|x| + |y| + |z| = i$. Zjavne zjednotenie všetkých týchto množín dáva celú množinu $\mathbb{Z}^3$. Ukážeme teraz, že každá množina M_i je konečná. Pre jej trojice (x, y, z) platí $|x|, |y|, |z| \leq i$, čiže $x, y, z \in \{-i, -i+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, i-1, i\}$, čo je pre každú zložku $2i+1$ možností. Preto množina M_i obsahuje najviac $(2i+1)^3$ trojíc, čo je konečne veľa. (Samozrejme, obsahuje ich menej, ale ich presný počet nás netrápi.) Teda $\mathbb{Z}^3$ je spočítateľné zjednotenie spočítateľných (dokonca konečných) množín, preto je $\mathbb{Z}^3$ spočítateľná [Škoviera, Tvrdenie 2.11]. Keďže $|\mathbb{Z}^3| = |B|$, tak aj množina B je **spočítateľná**.

Ak by sme nechceli použiť tvrdenie zo skrípt, tak vieme na základe množín M_i aj nájsť zoradenie prvkov $\mathbb{Z}^3$ postupnosti. Začneme s prázdnou postupnosťou a postupne pre každé $i \in \mathbb{N}$ do postupnosti pridáme všetky prvky M_i zoradené lexikograficky. Zjavne $\{M_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ je rozklad množiny $\mathbb{Z}^3$ (rozkladáme podľa súčtu absolútnych hodnôt). Všetky množiny M_i sú konečné. Preto sa každý prvok, ktorý sa nachádza v množinách M_i raz dostane do postupnosti. A keďže ide o rozklad, tak dostaneme každý prvok $\mathbb{Z}$ práve raz.

Dôkazov, že $\mathbb{Z}^3$ je spočítateľná množina vie byť veľa. Stručne načrtneme iné:

- Na základe bijekcie $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ spravíme bijekciu $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{N}^3$. Dvakrát využijeme bijekciu $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ čím sa dostaneme z $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a potom do $\mathbb{N}$.
- Nájdeme injekciu $f: \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{N}$, $f(s_1 a_1, s_2 a_2, s_3 a_3) = 2^{s_1} \cdot 3^{a_1} \cdot 5^{s_2} \cdot 7^{a_2} \cdot 11^{s_3} \cdot 13^{a_3}$, kde $a_i \in \mathbb{N}$ a $s_i \in \{-1, 1\}$ (teda zapísali sme si celé číslo pomocou jeho absolútnej hodnoty a znamienka). Injektívnosť vyplýva z jednoznačnosti prvočíselného rozkladu. Po prečíslovaní vieme dostať bijekciu.

(2 body) Máme graf G, ktorého vrcholy sú všetky 10-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, 26\}$. Hranami sú spojené práve tie vrcholy A, B, pre ktoré sú množiny A, B disjunktné.

a) Koľko hrán má graf G?

b) Je graf G eulerovský?

c) Je graf G súvislý?

d) Je graf G bipartitný?

Vaše tvrdenia dokážte.

Označme $M = \{1, 2, \ldots, 26\}$. Drobným chytákom v úlohe bolo, že na overenie toho, či je G eulerovský, bolo treba overiť súvislosť. Preto v riešení uvádzame najprv riešenie c) a potom b).

Podúloha a)

Graf má $\binom{26}{10}$ vrchol. Spočítame teraz stupeň vrchola A. K 10-prvkovej množine A musíme nájsť disjunktnú množinu B. Teda B nesmie obsahovať žiadny z 10 prvkov množiny A, teda máme na výber len $26 - 10 = 16$ prvkov. Stupeň A je teda $\binom{16}{10}$. Počet hrán je polovica súčtu stupňov, teda

$$\frac{\binom{26}{10} \cdot \binom{16}{10}}{2}.$$

Podúloha c)

Riešenie cez menenie prvkov po jednom. Nech A je 9-prvková podmnožina M a $x, y \in M - A$. Ukážeme, že medzi vrcholmi $A \cup \{x\}$ a $A \cup \{y\}$ je cesta dĺžky 2. Keďže $M - A - \{x, y\}$ má $26 - 11 = 15$ prvkov, tak vieme vybrať 10-prvkovú množinu $B \subseteq M - A - \{x, y\}$, ktorá je disjunktná aj s $A \cup \{x\}$, aj s $A \cup \{y\}$. Tým sme našli hľadanú cestu. Opakovaným využitím tejto cesty sa vieme zostrojiť sled medzi ľubovoľnými dvomi vrcholmi A, B – postupne budeme meniť prvky, v ktorých sa A a B líšia, výmena jedného prvku nám pridá do sledu dve hrany. A ak máme A-B-sled, tak máme aj A-B-cestu, teda graf je súvislý.

Formálne poriadne sa toto riešenie dá podať cez matematickú indukciu. Dokážeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak sa vrcholy A, B líšia v n prvkoch, tak G obsahuje A-B-sled. Pre $n = 0$ máme $A = B$ a vyhovuje sled nulovej dĺžky. Predpokladajme platnosť tvrdenia pre n a uvažujme dva vrcholy A, B, ktoré sa líšia v $n + 1$ prvkoch – jednu dvojicu rozdielnych prvkov si označme $a \in A$, $b \in B$. Nech $B' = (B - \{b\}) \cup \{a\}$ (teda v B vymeníme b za a. Množiny A a B' sa líšia len v n prvkoch, preto podľa IP medzi nimi existuje sled. Tento sled potom doplníme: $B' \to C \to B$, kde C je 10-prvková podmnožina $M - B - \{a\}$, ktorá zjavne existuje, nakoľko vyberáme z 15-prvkovej podmnožiny.

Riešenie podľa počtu spoločných prvkov. Nájdeme cestu medzi ľubovoľnými dvomi rôznymi vrcholmi A, B. Hľadanie rozdelíme podľa toho, koľko prvkov spolu obsahujú

- $11 \leq |A \cup B| \leq 16$: Vtedy $|M - (A \cup B)| \geq 10$ a existuje 10-prvková podmnožina $X \subseteq M - (A \cup B)$. Máme tak cestu A, X, B.
- $17 \leq |A \cup B| \leq 19$: Vtedy $1 \leq |A \cap B| \leq 3$ a $|M - (A \cup B)| \geq 7$. Zostrojíme 10-prvkovú množinu X tak, že prvky $B - A$ doplníme prvkami z $M - (A \cup B)$. Keďže potrebujeme pridať najviac 3 prvky a k dispozícii máme aspoň 7 prvkov $M - (A \cup B)$, tak je to možné. Množina X je disjunktná s A

a s B má spoločných aspoň 7 prvkov. Teda $|X \cup B| \leq 20 - 7 = 13$, čiže podľa predchádzajúceho bodu máme cestu X, Y, B. Celkovo tak dostávame cestu A, X, Y, B.

- $|A \cup B| = 20$: Vtedy A, B sú disjunktné a sú spojené hranou.

V každom prípade sme našli A-B-cestu, dokonca vždy mala táto cesta dĺžku najviac tri.

Podúloha b)

Každý vrchol má stupeň $\binom{16}{10} = 8008$, čo je párne číslo. Keďže G je súvislý a všetky vrcholy má párneho stupňa, tak je eulerovský

Podúloha d)

Graf G nie je bipartitný, nakoľko obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, ktorej vrcholy sú:

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
2. $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$,
3. $\{21, 22, 23, 24, 25, 26, 1, 2, 3, 4\}$,
4. $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$,
5. $\{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$.