4. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **utorok 19. 12., 12:00**

Úloha 1. *(BONUS, 2 body)* Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B.

a) Dokážte, že ff^- je reláciou ekvivalencie na množine A.

b) Uveďte príklad zobrazenia $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pre ktoré rozklad množiny ~~$\mathbb{N}$~~ $\mathbb{Z}$ indukovaný reláciou ekvivalencie ff^- je
$$\{\{a, -a\};\ a \in \mathbb{N}\}.$$
Správnosť časti b) stačí stručne neformálne zdôvodniť.

Pozámka. f^- značí inverznú reláciu. Relácie skladáme v porafí, že ff^- je naozaj reláciou na A.

Úloha 2. *(2 body)* Nech M je množina všetkých neprázdnych podmnožín prirodzených čísel, teda $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$. Na množine M definujeme reláciu $\preceq$ tak, že pre každé $A, B \in M$ platí

$$A \preceq B \Leftrightarrow [A = B \vee (\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)].$$

Dokážte, že $(M, \preceq)$ je usporiadaná množina a určte všetky jej minimálne, maximálne, najväčšie a najmenšie prvky. Správnosť nájdených prvkov dokážte.

Ak máte problémy s určením prvkov, tak za stratu najviac 0,5 boda môžete požadované prvky určiť v prípade, keď miesto množiny M máme množinu $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) - \{\emptyset\}$.

Úloha 3. *(2 body)* Uvažujme nasledujúce množiny obsahujúce nekonečné postupnosti celých čísel:

a) A obsahuje práve tie postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré platí $a_n^2 + a_{n+1}^2 = 2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$;

b) B obsahuje práve tie postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré platí $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

O každej z množín A, B rozhodnite, či je spočítateľná. Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 4. *(2 body)* Máme graf G, ktorého vrcholy sú všetky 10-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, 26\}$. Hranami sú spojené práve tie vrcholy A, B, pre ktoré sú množiny A, B disjunktné.

a) Koľko hrán má graf G?

b) Je graf G eulerovský?

c) Je graf G súvislý?

d) Je graf G bipartitný?

Vaše tvrdenia dokážte.