Dôkazy

→ **Úloha 1.** Dokážte, že platí
$$\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

→ **Úloha 2.** Porovnajte nasledovný pokus o dôkaz tvrdenia z predošlej úlohy s pokusom o dôkaz iného tvrdenia.

Pokus o dôkaz 1

Dokážeme, že platí
$$\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

Zo školy vieme, že nerovnosti môžeme nejako upravovať, tak poďme na to:
$$\begin{aligned} \sqrt{60} &> \sqrt{13} + \sqrt{17} && |^2 \\ \left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13} + \sqrt{17}\right)^2 \\ 60 &> 13 + 2\sqrt{13}\sqrt{17} + 17 \\ 60 &> 30 + 2\sqrt{221} && | -30 \\ 30 &> 2\sqrt{221} && | \,/2 \\ 15 &> \sqrt{221} && |^2 \\ 225 &> 221 \end{aligned}$$

Takto sme sa dostali k niečomu, čo platí, takže aj pôvodná nerovnosť je pravdivá.

Pokus o dôkaz 2

Dokážeme, že platí
$$\sqrt{2} > \sqrt{3}.$$

Opäť na to pôjdeme rovnako ako v predlošlom príklade. Teda budeme upravovať dokazovanú nerovnosť:
$$\begin{aligned} \sqrt{2} &> \sqrt{3}, && | -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} &> 0, && |^2 \\ (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 &> 0, \\ 2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + 3 &> 0, && | +2\cdot\sqrt{6} \\ 5 &> 2\cdot\sqrt{6}, && |^2 \\ 25 &> 24, \end{aligned}$$

a to je pravda. Preto platí $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Druhý pokus o dôkaz je zjavne nesprávny, nakoľko sme ním „dokázali“ nepravdivé tvrdenie $\sqrt{2} > \sqrt{3}$ (korektným dôkazom predsa nemôžeme dokázať nepravdivé tvrdenie). Avšak prvý pokus o dôkaz sa principiálne od druhého pokusu nelíši. Čiže tiež nebude úplne v poriadku. Poďme sa pozrieť bližšie na to, prečo je druhý pokus zlý.

Výhodou tejto úlohy je, že ľahko vieme vyhodnotiť pravdivosť každého výroku, ktorý sa v našom „dôkaze“ vyskytol. Problém nastáva medzi výrokmi
$$\sqrt{2} - \sqrt{3} > 0 \qquad \text{a} \qquad (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > 0.$$
Prvý z nich je totiž nepravdivý a druhý je pravdivý. V akom vzťahu sú tieto dva výroky? Akú logickú operáciu či úvahu sme použili? Vzťah tam máme nasledovný:
$$\sqrt{2} - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > 0.$$

Keď sa nad tým zamyslíme kus všeobecnejšie, túto implikáciu vieme chápať aj nasledovne: „Ak máme kladné číslo, tak jeho druhá mocnina je tiež kladná.“ Formálne zapísané tiež ako $\forall x \in \mathbb{R} \colon (x > 0 \Rightarrow x^2 > 0)$.

Problém je však ten, že táto implikácia kľudne pripúšťa, že z nepravdy vyplýva pravda. Tento problém vieme opísať aj tak, že sme tu použili tzv. *neekvivalentnú úpravu*, teda z výroku $\sqrt{2} - \sqrt{3} > 0$ sme odvodili výrok $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > 0$, ktorý s ním nie je ekvivalentný. Preto je nesprávny aj pokus o dôkaz 1, keďže sme v ňom použili rovnakú neekvivalentnú úpravu. Síce sme došli k správnemu záveru, ale nesprávnym logickým uvažovaním. Toto je veľmi častá chyba pri dokazovaní či vôbec riešení matematických úloh.

Ako to napraviť? Môžeme si uvedomiť, že ak pracujeme v kladných (resp. aj nezáporných) reálnych číslach, tak sa s umocňovania na druhú už stane ekvivalentná úprava. Teda platí $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \colon (a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2)$ (odvolávame sa pri tom na stredoškolské vedomosti). Ak teda skontrolujeme, že obe strany sú pred umocnením kladné, tak máme korektný dôkaz.

Úloha 3. Zhodnoťte korektnosť nasledovných dvoch pokusov o dôkaz úlohy 1:

Pokus o riešenie 3

Pomocou kalkulačky vypočítame:
$\sqrt{60} = 7{,}74596669$
$\sqrt{13} = 3{,}60555128$
$\sqrt{17} = 4{,}12310563$
Teda $\sqrt{13} + \sqrt{17} = 3{,}60555128 + 4{,}12310563 = 7{,}72865691$

Pokus o riešenie 4

Pomocou kalkulačky vypočítame: $\sqrt{60} \doteq 7{,}74596669$
$\sqrt{13} \doteq 3{,}60555128$
$\sqrt{17} \doteq 4{,}12310563$
Teda $\sqrt{13} + \sqrt{17} \doteq 3{,}60555128 + 4{,}12310563 = 7{,}72865691$

Úloha 4. Dokážte, že platí:

a) $\sqrt{9 - \sqrt{10}} < \sqrt{9 + \sqrt{10}} - 1$

b) $\sqrt{4} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{12}$

c) $\sqrt{60} + \sqrt{\sqrt{47} - \sqrt{46}} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

→ **Úloha 5.** Dokážte, že pre každé nezáporné reálne číslo x platí

$$\sqrt{4x + 8} > \sqrt{x} + \sqrt{x + 4}.$$

V nasledovných úlohách a aj neskôr na predmete sa budeme často stretávať s nasledovnými pojmami:

- Pre celé čísla a, d: $d \mid a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\colon a = k \cdot d$ (zápis čítame tiež „d delí a“, „d je deliteľom a“, „a je deliteľné d“).
- Pre celé čísla a, d, z: $a \bmod d = z \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\colon a = k \cdot d + z$ (čítame: „a dáva zvyšok z po delení d“).
- Racionálne číslo je také číslo, ktoré možno vyjadriť v tvare a/b, kde $a \in \mathbb{Z}$ a $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Množinu všetkých racionálnych čísel označujeme $\mathbb{Q}$.

O týchto pojmoch existuje veľa tvrdení (napr. súčet dvoch racionálnych čísel je racionálne číslo), ktoré zrejme aj poznáte zo strednej školy. V nasledovných úlohách si niektoré alebo podobné tvrdenia dokážeme. Preto ich v dôkazoch nevyužívajte. Snažte sa dôkazy spraviť čo najviac len z definície.

→ **Úloha 6.** Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $\forall a,\, b \in \mathbb{R}_0^+\colon \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

b) $\exists x \in \mathbb{R}\colon 3x + 2 > 2x + 5$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \exists y \in \mathbb{R}^+\colon x \cdot y = 1$

d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R}^+\colon \left(3x + 5 < 2^x \Rightarrow 4x + 8 < 2^{x+1}\right)$

f) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(5 \mid a \wedge 5 \mid b) \Rightarrow 5 \mid (a+b)]$

g) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (7 \nmid 47n \Rightarrow 7 \nmid n)$

h) $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^+\colon \left(7x + \frac{3}{y} < 4y + \frac{2}{x} \Rightarrow x < y\right)$.

i) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

j) $\forall n \in \mathbb{Z}\colon (3 \nmid n \Rightarrow n^2 \bmod 3 = 1)$

Úloha 7. Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $\forall a,\, b \in \mathbb{N}\colon [(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a+b)]$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^{+}\colon (2^n < n! \Rightarrow 2^{n+1} < (n+1)!)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (5 \mid n^2+1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

d) $\forall a,\, b \in \mathbb{N}\colon [(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

e) $\forall a,\, b \in \mathbb{R}^{+}\colon \dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$

f) $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^{+}\colon \left(5x^2+7x+2 \leq 4y^2+3y \Rightarrow x \leq y\right).$

Úloha 8. Dokážte, že nasledovné čísla sú iracionálne. Môžete pritom využiť, že číslo π je iracionálne.

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{p}$, kde p je ľubovoľné prvočíslo

c) 2π

d) $\dfrac{47}{\sqrt[3]{\pi}+42}$

Úloha 9. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov. vaše tvrdenia dokážte.

→ a) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.

→ b) Súčet ľubovoľných štyroch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný štyrmi.

c) Súčin ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.

d) Súčin ľubovoľných päť za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný piatimi.

e) Súčin ľubovoľných päť za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 120.

f) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

g) Súčet dvoch racionálnych čísel je racionálny.

→ h) Súčet dvoch iracionálnych čísel je iracionálny.

i) Súčin dvoch racionálnych čísel je racionálny.

j) Súčin dvoch iracionálnych čísel je iracionálny.

k) Súčet racionálneho a iracionálneho čísla je iracionálny.

l) Ak súčin dvoch reálnych čísel je iracionálne číslo, tak aspoň jedno z nich musí byť iracionálne.

→ m) Ak súčet piatich reálnych čísel je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

n) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow a \mid (b+c)]$

o) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [a \mid (b+c) \Rightarrow (a \mid b \wedge a \mid c)]$

p) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [a \mid bc \Rightarrow (a \mid b \wedge a \mid c)]$

q) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(\mathrm{NSD}(a,b) = \mathrm{NSD}(b,c) = 1 \Rightarrow \mathrm{NSD}(a,c) = 1]$

r) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(\mathrm{NSD}(a,b) = \mathrm{NSD}(b,c) = 2 \Rightarrow \mathrm{NSD}(a,c) = 2]$

s) Ak $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

→ t) Z ľubovoľných piatich za sebou idúcich čísel možno vybrať štyri čísla, ktorých súčet bude deliteľný štyrmi.

Úloha 10. *Pytagorejská trojica* je taká trojica kladných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = c^2$. Rozhodnite, či v každej pytagorejskej trojici:

a) sa nachádza aspoň jedno párne číslo;

b) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné tromi;

c) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné štyrmi;

d) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné šiestimi;

e) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné siedmimi.

Úloha 11. Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\frac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\frac{a-b}{a+b}$.

Úloha 12. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 13. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x + 11y$, potom aj $31 \mid x + y$.

Úloha 14. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 15. Dokážte, že neexistuje mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý by platilo $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

Úloha 16. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?

Úloha 17. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je aj $p + 2$ prvočíslo, tak potom existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je $p + 2$ prvočíslo a navyše $p + 1$ je deliteľné 6-timi.

Úloha 18. (*) Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 19. (*) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo 2 najväčším spoločným deliteľom čísel $2n+6$, $4n + 10$.

Úloha 20. (*) Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.