Cvičenie 2B: Dôkazy II

Úloha 1. Dokážte, že nasledovné tvrdenia sú tautológie

→ a) $[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$,

→ b) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

→ c) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

d) $(a \wedge b) \Rightarrow (c \vee (d \Rightarrow (e \vee (a \wedge d))))$

e) $[(a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \vee c)] \Rightarrow [((c \Rightarrow d) \wedge a) \Rightarrow d]$

f) $(a \wedge \neg b) \vee [((\neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg e) \wedge (f \vee \neg g)) \Rightarrow (d \vee \neg e)]$

g) $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \Rightarrow (d \wedge \neg e)) \vee (\neg c \wedge d \wedge e) \vee (d \Rightarrow (\neg a \wedge c))$

h) $(a \Rightarrow \neg c) \vee (\neg b \Rightarrow (\neg d \Rightarrow e)) \vee ((f \wedge c) \Rightarrow (a \wedge \neg d))$.

Úloha 2. Pre každý z uvedených výrokov nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(t)$, $b(t)$ a $c(t)$ definovaných na množine M, aby po ich dosadení do výroku sme dostali pravdivý / nepravdivý výrok

→ a) $[\exists x \in M\colon a(x) \wedge \exists y \in M\colon b(y)] \Rightarrow \forall z \in M\colon (a(z) \Rightarrow b(z))$

b) $\forall x \in M\colon\ [a(x) \Rightarrow \exists y \in M\colon b(y)] \Rightarrow \forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(x))$

c) $[\forall x \in M\colon a(x) \Rightarrow \exists y \in M\colon b(y)] \Rightarrow \forall x \in M\colon \exists y \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(y))$

d) $[\forall x \in M\colon \exists y \in M : (a(x) \Rightarrow b(y)) \wedge \exists x \in M\colon \forall y \in M\colon (b(x) \Rightarrow c(y))] \Rightarrow \forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow c(x))$

→ e) $\forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow \neg b(x)) \Rightarrow [\forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \vee \forall x \in M\colon (b(x) \Rightarrow a(x))]$

Úloha 3. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie. V prípade, že nejde o tautológiu, možno dostať tautológiu nahradením $\Leftrightarrow$ za $\Leftarrow$ alebo $\Rightarrow$?

→ a) $\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon a(x)$

→ b) $\exists x\colon a(x) \Rightarrow \forall x\colon a(x)$

→ c) $\forall x\colon (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \wedge \forall x\colon b(x))$

→ d) $\forall x\colon (a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \vee \forall x\colon b(x))$

e) $\exists x\colon (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\exists x\colon a(x) \wedge \exists x\colon b(x))$

f) $\exists x\colon (a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow (\exists x\colon a(x) \vee \exists x\colon b(x))$

→ g) $\forall x\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \Rightarrow \forall x\colon b(x))$

h) $\exists x\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon b(x))$

i) $(\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon b(x)) \Leftrightarrow \exists x\colon (a(x) \Rightarrow b(x))$

→ **Úloha 4.** Rozhodnite o platnosti nasledovných výrokov:

a) $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon 47n^5 + 42n^3 + 17n^2 - 9 \leq cn^5$

b) $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon n^2 + 47 \leq cn$

c) $\exists K \in \mathbb{R}\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon (x \geq K \Rightarrow x^7 - 50x^6 - 47x^5 - 42x^3 - 17x^2 + 18x - 9 \geq 0)$

Ako dokazovať kvantifikované tautológie

Ilustrujeme si to na modifikácii úlohy 3g), kde dokážeme, že

$$(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$$

je tautológia.

Priamy dôkaz

1. Nech platí $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$.
Dokážeme, že platí $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$:
    2. Nech platí $(\forall x)a(x)$.
    Dokážeme, že platí $(\forall x)b(x)$:
        Pre každé x platí:
            3. $a(x)$ (lebo 2.)
            4. $a(x) \Rightarrow b(x)$ (lebo 1.)
            5. $b(x)$ (lebo 3. a 4.)
        Teda platí $(\forall x)b(x)$.
    Teda platí $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$
Teda platí $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

Komentár. Dokazovaná tautológia má formu implikácie. Tú dokazujeme priamo tak, že predpokladáme pravdivosť ľavej strany a ukážeme, že platí aj pravá strana. Keďže na pravej strane je opäť implikácia, tak tento postup zopakujeme. Dôkazy týchto dvoch implikácií sú v červených rámčekoch. Dostaneme sa k dokazovaniu výroku v tvare všeobecného kvantifikátora (modrý rámček). Ten dokazujeme tak, že napíšeme dôkaz kvantifikovanej výrokovej formy všeobecne za pomoci premennej (zlený rámček). Všimnite si, že vnútri zeleného rámčeka nemáme žiadne kvantifikátory. Do vašich riešení nemusíte písať tento komentár. Tiež môžete vypustiť aj závery „Teda platí…“

Dôkaz sporom

Pre spor predpokladajme, že (pre nejaké univerzum a nejaké výrokové formy $a(x)$, $b(x)$ na ňom definované) platí negácia, teda:

1. $\neg[(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))]$
2. $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \wedge \neg[(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)]$ (negácia 1.)
3. $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$ (lebo 2.)
4. $(\exists x)(a(x) \wedge \neg b(x))$ (lebo 2. + negácia)
5. $a(c) \wedge \neg b(c)$ pre nejaký prvok c (lebo 4.) (tu sme zaviedli do nášho dôkazu **novú** premennú c, ktorou sme označili prvok univerza, ktorého existenciu zaručuje výrok 4.)
6. $a(c) \Rightarrow b(c)$ (lebo 2. platí pre všetky prvky univerza, teda aj pre naše c)
7. $\neg(a(c) \Rightarrow b(c))$ (negácia 5.) – SPOR s tvrdením 6.

Časti písané šedou slúžia pre lepšie objasnenie, do riešenia takto podrobne netreba písať.

Celé tvrdenie z úlohy 3g) nie je tautológia. To vieme dokázať dosadením, kedy nám vyjde nepravda:

Riešenie

Na doméne $\{1,2\}$ definujme $a(x) \Leftrightarrow x = 1$, $b(x) \Leftrightarrow x = 2$. Po dosadení dostávame výrok

$$\underbrace{(\forall x \in \{1,2\})(x = 1 \Rightarrow x = 2)}_{\text{0, lebo neplatí pre } x=1} \Leftrightarrow (\underbrace{(\forall x \in \{1,2\})(x = 1)}_{\text{0, lebo neplatí pre x = 2}} \Rightarrow \underbrace{(\forall x \in \{1,2\})(x = 2)}_{\text{0, lebo neplatí pre } x=1},$$

ktorého pravdivostná hodnota je 0.

Ako vieme na takéto dosadenie prísť? Výrokové formy si vieme predstaviť ako tabuľky, kde pre každý prvok univerza máme napísané pravdivostnú hodnotu, teda tabuľku s hlavičkou

x	$a(x)$	$b(x)$

Poďme teda nájsť také výrokové formy, pre ktoré nebude platiť $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$. Keďže ide o ekvivalenciu. Máme dve možnosti: $1 \Leftrightarrow 0$ alebo $0 \Leftrightarrow 1$. Pri prvej možnosti sa nám dariť nebude (možno aj dôjdeme k sporu a dokážeme, že ide o tautológiu, ako vyššie). Preto skúsime druhú možnosť:

$$\underbrace{(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))}_{0} \Rightarrow \underbrace{((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))}_{1}$$

Z toho, že $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$ neplatí máme, že platí $(\exists x)(a(x) \wedge \neg b(x))$, teda existuje riadok tabuľky, v ktorom máme 1 a 0.

x	$a(x)$	$b(x)$
	1	0

Keďže $b(x)$ je už niekedy 0, tak výrok $(\forall x)b(x)$ neplatí. Avšak má platiť $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$, preto $(\forall x)a(x)$ tiež neplatí. Teda v niektorom riadku musí mať $a(x)$ nulu.

x	$a(x)$	$b(x)$
	1	0
	0	

Prešli sme už všetko. Tak nám už ostáva len dokončiť tabuľku – voľné miesto v $b(x)$ vyplníme ľubovoľne a nejako si pomenujeme prvky x univerza, napr. 42 a 47. Dostávame teda výrokové formy definované na $\{42, 47\}$ ako:

x	$a(x)$	$b(x)$
42	1	0
47	0	0

Pre tie už ľahko overíme, že nám vyjde nepravdivý výrok.

Niekoľko rád ako dokazovať výroky podľa ich typu

Tu je prehľad základných štruktúr dôkazu podľa typu výroku, ktorý máme dokazovať. Defaultne tak dostaneme priamy dôkaz, ale nič nám nebraní pred dokazovaním si dokazované tvrdenie upraviť na iné (nepriamym dôkazom či matematickou indukciou).

$A \wedge B$: Dokážeme A a potom dokážeme B.

$A \vee B$: Rozdelíme dôkaz na dva prípady (napr. ak je nejaké číslo párne alebo nepárne). Z jedného dokážeme A a z druhého dokážeme B.

$A \Rightarrow B$: Predpokladáme, že A platí a dokážeme B.

$A \Leftrightarrow B$: Dokážeme $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

$\diamond$ V niektorých prípadoch je možné nájsť postupnosť ekvivalentných úprav od výroku A k B. Tu však treba byť obozretný, či naozaj všetky sú ekvivalentné. Pre lepšiu kontrolu odporúčame skontrolovať, či sú všetky úvahy správne jedným aj druhým smerom.

$\forall x\colon a(x)$: Dokážeme $a(x)$ za použitia premennej x.

$\exists x\colon a(x)$: Ukážeme platnosť $a(x)$ pre jednu konkrétnu voľbu premennej x (napr. dokážeme $a(47)$). Pri voľbe x môžeme použiť aj premenné, ale iba ak už v našom dôkaze nejaké máme definované (a nesmú byť „zakryté“ kvantifikátorom).

A tu je prehľad základných logických krokov, ktoré vieme počas dokazovania robiť. Opäť pre každý z najčastejších typov výrokov uvádzame, čo z neho možno odvodiť.

$A \wedge B$: Vieme odvodiť platnosť A, rovnako aj platnosť B.

$A \vee B$: Vieme rozdeliť dôkaz na dve časti, v jednej predpokladáme platnosť A a v druhej platnosť B (vhodné pri dokazovaní výrokov so spojkou alebo).

$A \Rightarrow B$: Ak máme už dokázané A, vieme odvodiť platnosť B

$A \Leftrightarrow B$: Rovnako ako pri $A \Rightarrow B$, príp. $B \Rightarrow A$.

$\forall x\colon a(x)$: Vieme za x dosadiť hodnotu a odvodiť pre ňu platnosť výroku (napr. $a(47)$, ak sme v celých číslach).

$\exists x\colon a(x)$: Zavedieme **novú** premennú, napr. c, a odvodíme platnosť $a(c)$.