Cvičenie 3A: Matematická indukcia

Úloha 1. V rade máme umiestnené v nejakom poradí čísla $1, 2, \dots, 20$. V jednom ťahu vieme vymeniť pozície dvoch ľubovoľných čísel. Dokážte, že pomocou nanajvýš 19 ťahov vieme čísla zoradiť od najmenšieho po najväčšie bez ohľadu na ich počiatočné poradie.

Úloha 2. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

→ **Úloha 3.** Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí rovnosť

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

Ďalšie úlohy na dokazovanie súčtov nájdete v `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/udds/zbierka.pdf`, str. 10.

→ **Úloha 4.** Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo t je číslo $8^t + 6$ deliteľné siedmimi.

→ **Úloha 5.** Nech $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Pre $k \geq 2$ položme $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (tzv. Fibonacciho postupnosť). Dokážte, že pre ľubovoľné prirodené číslo k platí

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

Úloha 6. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

→ a) $2^n \geq n - 2$,
b) $n^2 \leq 2^n$.
c) $n! > 2^n$,
d) $2n < 3^n$,
e) $3^n + 4^n \geq 5^n$,
f) $2^n \geq 20n$,
g) $3^n < n!$,
h) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

Úloha 7. Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí

$$1! + 2! + 3! + \dots + n! < \frac{(n+1)!}{n-1}.$$

Úloha 8. Dokážte, že pre všetky celé čísla $n > 1$ platí

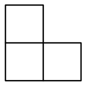
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

→ **Úloha 9.** Dokážte, že n priamok v rovine má najviac $n(n-1)/2$ priesečníkov.

Úloha 10. Na stole máme v rade n mincí zľava doprava, ktoré môžu byť ľubovoľne otočené (buď lícom nadol, alebo nahor). V jednom ťahu môžeme zobrať niekoľko prvých mincí zľava a každú z nich otočiť. Dokážte, že môžeme naše ťahy voliť tak, aby sme po nejakom čase mali všetky mince otočené lícom nahor.

Úloha 11. Máme rad n políčok, ktoré sú striedavo biele a čierne. Do týchto políčok vpíšeme v nejakom poradí čísla $1, 2, \dots, n$, každé práve raz. V jednom kroku môžeme zvoliť políčka rôznej farby a vymeniť na nich čísla. Dokážte, že bez ohľadu na to, v akom poradí čísla vpíšeme do políčok, nám stačí spraviť $2n - 2$ krokov na to, aby sme čísla usporiadali vzostupne.

→ **Úloha 12.** Máme štvorčekovú sieť rozmerov $2^n \times 2^n$ štvorčekov pre celé číslo $n \geq 1$. Jedno zo štyroch políčok v strednom štvorci 2×2 je zafarbené na čierno. Dokážte, že každú takúto štvorčekovú sieť vieme vydláždiť dlaždicami v tvare triomina L (ako na obrázku) tak, že sa dlaždice nebudú prekrývať a každé políčko s výnimkou čierneho bude zakryté dlaždicou. Dlaždice vieme aj otáčať. [Riešenie]



Úloha 13. *Hanojské veže* je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť najvrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže. Po celý čas musíme dodržať pravidlo, že väčší disk nemôže byť položený na menší disk. Cieľom hlavolamu je presunúť všetky disky z jednej tyče na druhú tyč. Dokážte, že tento hlavolam možno vyriešiť pomocou $2^n - 1$ ťahov.

Úloha 14. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

a) $3 \mid n^3 - n$,

b) $5 \mid n^5 - n$,

c) $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$,

d) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Úloha 15. V rovine je rozmiestnených n kružníc, z ktorých každá pretína všetky ostatné. Dokážte, že oblasti roviny, ktoré tieto kružnice vyčleňujú, možno ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu. Oblasti, ktoré majú spoločné len niektoré body, nepovažujeme za susedné.

Úloha 16. Zistite na koľko najviac častí môže n kružníc deliť rovinu. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 17. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované -1, -2, -3, $\dots$, pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

Úloha 18. Dokážte, že políčka tabuľky $2^n \times 2^n$ možno zafarbiť bielou a čiernou farbou tak, že keď si zoberieme ľubovoľné dva riadky, tak sa budú na polovici miest zhodovať a na zvyšnej polovici miest líšiť.

Úloha 19. Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ je ľubovoľná konečná množina prirodzených čísel, pre ktorú platí $|A| = n$. Označme

$$S(A) = \{x + y \mid x \in A;\ y \in A\}.$$

Dokážte, že $|S(A)| \geq 2n - 1$.

Úloha 20. (*) Nech $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sú ľubovoľné konečné množiny prirodzených čísel také, že $|A| = m \geq 1$ a $|B| = n \geq 1$. Označme

$$A + B = \{a + b \mid a \in A;\ b \in B\}.$$

Dokážte, že potom

$$|A + B| \geq m + n - 1$$

a ukážte, že tento dolný odhad je tesný[1] pre všetky $m, n \geq 1$.

Úloha 21. (*) Dokážte, že pre ľubovoľných n reálnych čísel a_1, a_2, $\dots$, a_n, z ktorých je každé aspoň 1 platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n - 1 + a_1 a_2 \dots a_n.$$

Úloha 22. (*) Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel x_1, x_2, $\dots$, x_n so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Úloha 23. (*) Pod *rozlomením* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž priamky, ktorá prechádza hranami medzi štvorčekmi) na dve obdĺžníkové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorčekov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku čokolády rozmerov $m \times n$ štvorčekov ($m, n \in \mathbb{N}^+$ možno rozdeliť na jednotlivé štvorčeky pomocou $mn - 1$ rozlomení.

[1]K ľubovoľnej dvojici prirodzených čísel $m, n \geq 1$ teda existujú konečné množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ také, že $|A| = m$, $|B| = n$ a $|A + B| = n + m - 1$.

Úloha 24. (*) Turnaja sa zúčastnilo n tímov. Každá (neusporiadaná) dvojica tímov odohrala práve jeden zápas. Každý zápas sa skončil výhrou niektorého tímu. Dokáže, že tímy možno zoradiť do postupnosti $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tak, že tím t_1 vyhral nad tímom t_2, tím t_2 nad t_3 a tak ďalej až tím t_{n-1} vyhral nad tímom t_n.

Úloha 25. (*) Nech x je reálne číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokážte, že potom aj $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pre všetky prirodzené čísla n.

Úloha 26. (*) Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b existujú celé čísla k, l také, že

$$\mathrm{NSD}(a, b) = ka + lb.$$

Nápoveda. Môžete využiť (bez dôkazu), že $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b, a - b)$.