

Cvičenie 3B: Množiny

→ **Úloha 1.** Dokážte identity:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platia identity:

→ a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C),$

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$

→ c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$

→ **Úloha 3.** Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C.$

→ **Úloha 4.** Rozhodnite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

b) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

Pre množinu M definujeme *potenčnú množinu* množiny M ako množinu všetkých podmnožín množiny M . Označujeme ju ako $\mathcal{P}(M)$. Teda

$$\mathcal{P}(M) = \{X; X \subseteq M\}.$$

Pri dôkazoch teda budeme využívať, že $X \in \mathcal{P}(M) \Leftrightarrow X \subseteq M$.

→ **Úloha 5.** Zistite, ako vyzerá

a) $\mathcal{P}(\{1, 2\})$

b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$

→ **Úloha 6.** Zistite, v akom vzťahu (rovnosť / inklúzia / žiaden) sú množiny:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$

Úloha 7. Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ sa dá pre $n \geq 2$ vyjadriť ako:

a) $A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) \cup \dots \cup (A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}))$

b) $(A_1 - A_2) \cup \dots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$

Úloha 8. Nech A, B, C sú množiny.

a) Dokážte, že ak $A \subseteq B$, tak $A \times C \subseteq B \times C$.

b) Ako sa zmenení výsledok z a), ak namiesto \subseteq píšeme \subsetneq ?

c) Platí aj opačná implikácia?

Úloha 9. Dokážte, že množiny A a B sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

Úloha 10. Dokážte, že nasledovné tri podmienky sú ekvivalentné:

(i) $A \subseteq B,$

(ii) $A \cup B = B,$

(iii) $A \div B = B - A.$

■ K nasledovným úlohám nájdete na konci dokumentu úplné riešenia.

Úloha 11. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}$.

Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 12. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \cap \mathcal{P}(A \cup C)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) \supseteq \mathcal{P}(A \cup B) \cap \mathcal{P}(A \cup C)$

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenia dokážte z definície.

Úloha 13. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$.

Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 14. Nech A je podmnožina prirodzených čísel. *Supermnožinou* množiny A nazveme množinu všetkých nadmnožín množiny A v univerze prirodzených čísel. Budeme ju označovať $\mathcal{S}(A)$. Teda

$$\mathcal{S}(A) = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq X\}.$$

Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{S}(A \cap B) \subseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$,

b) $\mathcal{S}(A \cap B) \supseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$.

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenie dokážte z definície.

Riešenie úlohy 6a)

Riešenie

Ukážeme, že $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)
3. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A \cap B$, lebo každý prvok množiny X sa nachádza v A (vd'aka $X \subseteq A$) aj v B (vd'aka $X \subseteq B$), teda sa nachádza aj v $A \cap B$.
5. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ (definícia potenčnej množiny).

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.

Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $X \subseteq A \cap B$ (definícia potenčnej množiny)
3. $X \subseteq A$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq A$)
4. $X \subseteq B$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq B$)
5. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (lebo 3. a 4.)
6. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia potenčnej množiny)
7. $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A \cap B)) \Leftarrow (X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B))$.

Zdôvodnenie šedou sú zrejmé (ide len o použitie definície), môžete ich vynechať. Dôkaz 4. kroku 1. inklúzie možno spraviť viac formálne aj takto:

- i. Nech $y \in X$
- ii. $y \in A$ (lebo $X \subseteq A$)
- iii. $y \in B$ (lebo $X \subseteq B$)
- iv. $y \in A \cap B$ (lebo ii. a iii.)

Podobne možno formálne dokázať aj 3. krok (a analogicky aj 4. krok) z 2. inklúzie:

- i. Nech $y \in X$
- ii. $y \in A \cap B$ (lebo $X \subseteq A \cap B$)
- iii. $y \in A$ (definícia prieniku)

Riešenie úlohy 11

a) Ukážeme, že tvrdenie a) platí. Nech X je ľubovoľný prvok z množiny $\mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}$, ukážeme, že $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$:

1. $X \in \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A - B) \wedge X \notin \mathcal{P}(B)$ (definícia rozdielu)

3. $X \neq \emptyset$ (z 2.)
4. $X \subseteq A - B$ (z 2. + definícia \mathcal{P})
5. Ak si zoberieme ľubovoľný prvok $y \in X$, tak podľa 4. $y \in A - B$, teda $y \in A$. Preto $X \subseteq A$.
6. Keďže $X \neq \emptyset$, tak X obsahuje nejaký prvok z . Pre tento prvok podľa 4. platí $z \in A - B$, teda $z \notin B$. Keďže $(\exists z)(z \in X \wedge z \notin B)$, tak $X \not\subseteq B$.
7. $X \subseteq A \wedge X \not\subseteq B$ (z 5. a 6.)
8. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(B)$ (definícia \mathcal{P})
9. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ (definícia rozdielu)

Tým sme ukázali, že $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\} \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B))$, teda a) platí.

b) Ukážeme, že b) vo všeobecnosti neplatí. Nech $A = \{1, 2\}$ a $B = \{1\}$, potom

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \{\{2\}, \{1, 2\}\} \not\subseteq \{\{2\}\} = \mathcal{P}(A - B) - \{\emptyset\}.$$

Riešenie úlohy 12

Časť a) Pri dôkaze využijeme nasledovné tvrdenie: Pre ľubovoľné množiny X, Y, Z platí:

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \subseteq Y \cup Z. \quad (1)$$

Dôkaz. Nech platí $X \subseteq Y$. Dokážeme, že potom platí $X \subseteq Y \cup Z$. Pre ľubovoľné a platí

$$a \in X \stackrel{X \subseteq Y}{\Rightarrow} a \in Y \Rightarrow (a \in Y \vee a \in Z) \Rightarrow a \in Y \cup Z.$$

Teda platí $(\forall a)(a \in X \Rightarrow a \in Y \cup Z)$, preto platí $X \subseteq Y \cup Z$. □

Dokážeme, že tvrdenie a) platí. Uvažujme prvok X , ktorý patrí do pravej strany rovnice, teda platí

$$X \in \mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)). \quad (2)$$

Na základe definície zjednotenia potom platí

$$X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C) \quad (3)$$

a podľa definície prieniku máme

$$X \in \mathcal{P}(A) \vee (X \in \mathcal{P}(B) \wedge X \in \mathcal{P}(C)). \quad (4)$$

Teraz využijeme definíciu potenčnej množiny, čím máme

$$X \subseteq A \vee (X \subseteq B \wedge X \subseteq C). \quad (5)$$

Dostali sme sa k tomu, že nám platí disjunkcia dvoch tvrdení. Preto ďalej rozdelíme dôkaz na dve vetvy podľa toho, ktoré platí.

Nech platí

$$X \subseteq A$$

Na základe (1) potom platí $X \subseteq A \cup B$ a aj $X \subseteq A \cup C$, teda máme

$$X \subseteq A \cup B \wedge X \subseteq A \cup C.$$

Nech platí

$$X \subseteq B \wedge X \subseteq C$$

Na základe (1) potom platí

$$X \subseteq B \cup A \wedge X \subseteq C \cup A,$$

čo vieme prepísať na

$$X \subseteq A \cup B \wedge X \subseteq A \cup C,$$

keďže prienik je komutatívny, čo priamo vyplýva z komutatívnosti spojky \wedge .

Tým pádom dostávame, že platí

$$X \subseteq A \cup B \wedge X \subseteq A \cup C,$$

keďže sme toto tvrdenie dostali v oboch vetvách. Teraz už len využijeme definíciu potenčnej množiny

$$X \in \mathcal{P}(A \cup B) \wedge X \in \mathcal{P}(A \cup C)$$

a prieniku a máme

$$X \in \mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C).$$

Teda sme dokázali, že

$$(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C))) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C),$$

teda platí $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C)$.

Časť b) Ukážeme, že tvrdenie neplatí. Nech $A = \{1\}$ a $B = C = \{2\}$. Potom

$$\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

a

$$\mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Keďže sa množina $\{1, 2\}$ nachádza v pravej strane, ale nenachádza sa v ľavej strane, tak $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)) \not\subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cup C)$.

Riešenie úlohy 13

Ukážeme, že **a) platí**. Pri riešení využijeme tvrdenie, že $X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq (A \wedge X \subseteq B)$. Túto ekvivalenciu sme ukázali na 4. cvičeniach pri riešení úlohu 5a), no nie je náročné si rozmyslieť, že platí. (Odporúčame, aby ste si takéto veci rozmysleli, lebo napr. ekvivalencia $X \subseteq A \cup B \Leftrightarrow (X \subseteq A \wedge X \subseteq B)$ už neplatí.) Ukázať, že jedna množina je podmnožinou druhej, znamená ukázať, že pre všetky X platí implikácia $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$. Predpokladajme teda, že pre nejaké ľubovoľné X platí $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ a dokážeme, že potom platí aj $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$.

1. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A \cap C)$ (definícia rozdielu množín)
3. $X \subseteq A \cap B \wedge \neg(X \subseteq A \cap C)$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B \wedge \neg(X \subseteq A \wedge X \subseteq C)$ (definícia prieniku)
5. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B \wedge (X \not\subseteq A \vee X \not\subseteq C)$ (negácia konjunkcie)

6. $X \subseteq A$ (z 5.)
7. $X \not\subseteq A \vee X \not\subseteq C$ (z 5.)
8. $X \not\subseteq C$ (z 6. a 7.)
9. $X \subseteq A \wedge X \not\subseteq C$ (z 6. a 8.)
10. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(C)$ (definícia potenčnej množiny)
11. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ (definícia rozdielu)

Ukážeme, že **b) neplatí**. Nech $A = \{1\}$ a $B = C = \emptyset$. Potom

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}\} - \{\emptyset\} = \{\{1\}\} \not\subseteq \emptyset = \{\emptyset\} - \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset) - \mathcal{P}(\emptyset) = \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C).$$

Poriadne riešenie a) Ukážeme si tiež, ako takéto tvrdenie dokázať bez využívania ekvivalencií o množinách, resp. ako si také tvrdenia vieme dokázať. Nech teda $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$, potom:

1. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A \cap C)$ (definícia rozdielu množín)
3. $X \subseteq A \cap B \wedge X \not\subseteq A \cap C$ (definícia potenčnej množiny)

4. $X \subseteq A$

Dôkaz: Pre každé y platí: $y \in X \stackrel{X \subseteq A \cap B}{\Rightarrow} y \in A \cap B \Rightarrow y \in A$.

5. $X \not\subseteq C$

Dôkaz: $X \not\subseteq A \cap C \Rightarrow (\exists z)(z \in X \wedge z \notin A \cap C) \Rightarrow (\exists z)(z \in X \wedge (z \notin A \vee z \notin C))$. Z toho, že $z \in X$ a $X \subseteq A$ máme, že $z \in A$. Preto zo $z \notin A \vee z \notin C$ vypláva $z \notin C$. Teda existuje také z , že $z \in X \wedge z \notin C$, preto $X \not\subseteq C$.

6. $X \subseteq A \wedge X \not\subseteq C$ (4. a 5.)
7. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(C)$ (definícia potenčnej množiny)
8. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ (definícia rozdielu)

Komentár opravovateľa Pri opravovaní som až tak nedbal na podrobnosť úprav (aj keď za priveľké myšlienkové skoky som tiež strhával), ale skôr som hodnotil, nakoľko z riešenia vidno, že rozumiete tomu, ako dôkaz takéhoto tvrdenia má vyzerieť. To znamená, že vo vašom riešení musí byť dokázaná implikácia $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ pre všetky X . To možno zapísať rôznymi spôsobmi. Ak dokazujeme priamo, tak by v riešení malo byť vidno, ako ide reťaz implikácia od platného predpokladu k dokazovanému výroku. V našom riešení je táto reťaz reprezentovaná očíslovanými bodmi, kde každý bod je dôsledkom bodov nad nimi. Ak to nie je jasné, tak k bodom vieme napísať aj na základe čoho sme ich vyvodili. Druhým spôsobom vie byť kreslenie šípok a tak naznačiť, čo sme z čoho dostali.

Dôkaz by nemal vyzerieť tak, že máme po papieri roztrúsené tvrdenia, medzi ktorými nevidno tieto vzťahy. Tiež si treba dávať pozor na syntaktické chyby. Napr. nasledovné: $\mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$ (množina nemôže byť na ľavej ani pravej strane ekvivalencie), $x \in (x \in A \vee x \in B)$ (prvok nemôže patriť do výroku), $x \in A \subseteq (x \in A \vee x \in B)$ (výrok nemôže byť podmnožinou výroku), spojky $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ môžu byť iba medzi výrokmami a nie pri množinách či ich prvkoch a iné.

Riešenie úlohy 14

a) Tvrdenie neplatí. Protipríkladom sú napr. množiny $A = \{1\}$ a $B = \{2\}$. Pre množinu $\{1\}$ máme $\{1\} \in \mathcal{S}(A \cap B) = \mathcal{S}(\emptyset)$, lebo $\emptyset \subseteq \{1\}$. Ale $\{1\} \notin \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$, lebo $\{1\} \notin \mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(\{2\})$, lebo $\{2\} \not\subseteq \{1\}$.

b) Ukážeme, že tvrdenie platí. Keďže obe strany inklúzie obsahujú len množiny prirodzených čísel, tak nám stačí ukázať, že $(\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B))$. Pre každé $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ platí:

1. $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$
2. $X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)$
3. $A \subseteq X \wedge B \subseteq X$
4. $A \cap B \subseteq X$, lebo každý prvok y množiny $A \cap B$ sa nachádza aj v A a vďaka $A \subseteq X$ sa y nachádza aj v X
5. $X \in \mathcal{S}(A \cap B)$

Iné riešenie b) Opäť budeme dokazovať, že $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B)$ platí pre všetky $X \subseteq \mathbb{N}$ a taktiež aj pre všetky $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Upravujme tento výrok:

$$\begin{aligned}
 & X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B) \\
 & \text{(definícia prieniku)} \quad \Downarrow \\
 & (X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B) \\
 & \text{(definícia supermnožiny)} \quad \Downarrow \\
 & (A \subseteq X \wedge B \subseteq X) \Rightarrow A \cap B \subseteq X \\
 & \text{(definícia podmnožiny)} \quad \Downarrow \\
 & ((\forall y)(y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (\forall y)(y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (\forall y)(y \in A \cap B \Rightarrow y \in X) \\
 & \text{tautológia } ((\forall y)a(y) \wedge (\forall y)b(y)) \Leftrightarrow (\forall y)(a(y) \wedge b(y)) \quad \Downarrow \\
 & (\forall y)((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (\forall y)(y \in A \cap B \Rightarrow y \in X) \\
 & \text{tautológia } (\forall y)(a(y) \Rightarrow b(y)) \Rightarrow ((\forall y)a(y) \Rightarrow (\forall y)b(y)) \quad \Uparrow \\
 & (\forall y)[((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow (y \in A \cap B \Rightarrow y \in X)] \\
 & \text{(definícia prieniku)} \quad \Downarrow \\
 & (\forall y)[((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow ((y \in A \wedge y \in B) \Rightarrow y \in X)] \quad (*)
 \end{aligned}$$

Dostali sme sa tak k výrokovej forme

$$((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \Rightarrow ((y \in A \wedge y \in B) \Rightarrow y \in X).$$

Na ňu sa však vieme pozrieť ako na zložený výrok s elementárnymi výrokmi $y \in A$, $y \in B$ a $y \in X$, každý z nich môže byť pravdivý alebo nepravdivý. Tento zložený výrok je tautológia. (Dôkaz z riešenia vynechávame, mali by ste byť schopní ho doplniť, tu to ide jednoducho aj tabuľkou.) Teda bez ohľadu na voľbu množín $A, B, X \subseteq \mathbb{N}$ je výroková forma (*) pravdivá. Vďaka implikáciám \Uparrow tak platí aj $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{S}(A \cap B)$, čo sme mali dokázať.

Zopár poznámok k druhému riešeniu. Pri riešení tohto typu si musíme dávať pozor na úpravu výrokov s kvantifikátormi, hlavne na ich rôzne „vynímanie pred zátvorky“. Totiž nie vždy ide o korektnú úpravu. Môžeme si všimnúť, že predposledná úprava má formu len jednosmernej implikácie. Preto tento postup nemôžeme použiť v riešení a). Ak aj ukážeme, že (*) v nejakom prípade neplatí, nič nám to nepovie. Totiž z nepravdy stále môže vyplývať aj pravda.