Cvičenie 4A: Dirichletov princíp

Dirichletov princíp vo svojej základnej verzii vyjadruje jednoduché pozorovanie, že po priradení n objektov do $m < n$ priečinkov bude aspoň jeden priečinok obsahovať aspoň dva objekty. Ak teda napríklad n holubov rozmiestnime do m holubníkov a $m < n$, tak aspoň v jednom holubníku musia byť najmenej dva holuby (preto je niekedy reč aj o *holubníkovom princípe*, angl. *Pigeonhole principle*).

Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tvoria *slabý rozklad* množiny B, ak Priradenie n objektov do m priečinkov možno sformalizovať ako zobrazenie $f : A \to B$ medzi konečnými množinami A a B takými, že $|A| = n$ a $|B| = m$. Základná verzia Dirichletovho princípu potom hovorí, že ak $m < n$, tak takéto zobrazenie nemôže byť injektívne.

Veta 1 (Dirichletov princíp). *Nech B je konečná množina veľkosti m a pre n množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = B$. Ak $m > n$, tak existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že $|A_i| \geq 2$.*

→ **Úloha 1.** Majme 101 (nie nutne rôznych) trojciferných prirodzených čísel. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dve, ktoré sa zhodujú v posledných dvoch cifrách (dekadického zápisu).

Úloha 2. Predpokladajme, že Bratislava má 419678 obyvateľov, z ktorých žiaden nemá viac ako 1000 rokov. Dokážte, že aspoň dvaja Bratislavčania sa narodili v rovnaký deň rovnakého roku.

→ **Úloha 3.** Majme päť (nie nutne rôznych) prirodzených čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu čísel a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $4 \mid a_i - a_j$.

Úloha 4. Majme $n + 1$ (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $n \mid a_i - a_j$.

→ **Úloha 5.** Majme 52 prirodzených čísel $a_1, \ldots, a_{52}$, ktorých zvyšky po delení číslom 100 sú po dvoch rôzne. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $100 \mid a_i + a_j$.

Úloha 6. Majme 52 (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, \ldots, a_{52}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $100 \mid a_i + a_j$ alebo $100 \mid a_i - a_j$.

Úloha 7. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n+1$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, ktoré majú rozdiel 1.

Úloha 8. Majme $2^{n-4} + 1$ n-bitových binárnych vektorov (teda postupností núl a jednotiek). Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dva, ktoré sa líšia v najviac štyroch bitoch.

Úloha 9. Vo vnútri rovnostranného trojuholníka o strane dĺžky 2 sa nachádza päť bodov. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu bodov, ktoré sú od seba vo vzdialenosti nanajvýš 1.

Úloha 10. Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, no najviac tri ovce. Medveď zje každý deň aspoň štyri ovce, no najviac sedem oviec. Dokážte, že v každom týždni existujú dva dni, keď bača utrpí rovnakú škodu.

Úloha 11. Počas deviatich kalendárnych týždňov zje vlk každý deň aspoň jednu ovcu, no v každom z deviatich kalendárnych týždňov zje najviac 12 oviec. Dokážte, že existuje úsek po sebe idúcich dní, počas ktorého zje vlk presne 15 oviec.

Úloha 12. Desať ľudí si posadalo za okrúhly stôl. Každý z nich dostal raňajky so svojou menovkou. Potom sa všetci postavili a náhodne sa presadili tak, aby nikto nesedel pred svojimi raňajkami.

→ a) Dokážte, že vieme vždy otočiť stôl tak, že aspoň dvaja budú mať pred sebou svoje jedlo.

→ b) Vieme vždy otočiť stôl tak, že aspoň traja budú mať pred sebou svoje jedlo?

c) Vyriešte úlohy a), b) pre prípad, keď za stolom je 11 ľudí.

V šachových úlohách budeme hovoriť, že dve figúrky sa ohrozujú práve vtedy, keď jedna z nich vie urobiť ťah na pozíciu obsadenú druhou z nich. Farby figúriek nás nezaujímajú, pokiaľ nie je napísané inak.

→ **Úloha 13.** Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

Úloha 14. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

→ **Úloha 15.** Koľko najviac veží možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?

Úloha 16. Koľko najviac strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 17. Koľko najviac kráľov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 18. Koľko najviac dám možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

→ **Úloha 19.** Koľko najviac koňov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 20. Koľko najviac bielych pešiakov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali (za predpokladu, že biely pešiak môže stáť aj v ôsmom rade)?

Úloha 21. *Špecializovaný strelec-expert* je šachová figúrka, ktorá sa môže hýbať iba po diagonálach rovnobežných s diagonálou `a1--h8`. Prípustné sú teda práve všetky ťahy po diagonále v smere „doprava hore“ alebo „doľava dole“. Koľko najviac špecializovaných strelcov-expertov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 22. *Prehnane iniciatívny strelec* je šachová figúrka, ktorej jeden ťah pozostáva z ľubovoľného nenulového počtu ťahov bežného strelca. Koľko najviac prehnane iniciatívnych strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

→ **Úloha 23.** Koľko najmenej čísel musíme vybrať z množiny $\{1, \ldots, 20\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovali dve, z ktorých jedno delí to druhé?

> **Veta 2** (Frekvenčná froma Dirichletovho princípu). *Nech B je konečná množina veľkosti m a pre n množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = B$. Ak $n/m > r - 1$, tak existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že $|A_i| \geq r$.*

Úloha 24. Dokážte, že pri devätnástich hodoch hracou kockou musí aspoň štyrikrát padnúť rovnaké číslo.

→ **Úloha 25.** Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

Úloha 26. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

→ **Úloha 27.** Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia 33 veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať päť veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice ostránime zvyšné nevybrané veže.

Úloha 28. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia $k \in \{0, 1, \ldots, 64\}$ veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať $\lceil k/8 \rceil$ veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice ostránime zvyšné nevybrané veže.

Úloha 29. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia deviatich strelcov na (štandardnej) šachovnici možno vybrať dvoch strelcov tak, aby sa neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice odstránime zvyšných nevybraných strelcov. Nájdite vhodné zovšeobecnenie tohto tvrdenia pre $k \in \{0, 1, \ldots, 64\}$ strelcov.

Úloha 30. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia 17 strelcov na (štandardnej) šachovnici možno vybrať troch strelcov tak, aby sa neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice odstránime zvyšných nevybraných strelcov.

Úloha 31. Koľko najmenej kráľov musíme umiestniť na (štandardnú) šachovnicu, aby zaručenie existovala pätica kráľov, z ktorých sa žiadni dvaja neohrozujú?

→ **Úloha 32.** Nájdite najmenšie také číslo k pre ktoré platí, že v každej k-prvkovej podmnožine množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$ sa nachádzajú tri čísla, ktoré majú spoločnú cifru (spoločná cifra musí byť rovnaká pre všetky tri, ale môže v nich byť na rôznych pozíciách, napr. čísla 12, 31 a 17 majú spoločnú cifru 1, ale čísla 42, 47 a 27 nemajú spoločnú cifru). Vaše tvrdenie dokážte.

Úloha 33. Ohodnoťte nasledovné dve riešenia úlohy 19. Sú správne, správne s drobnými chybami alebo obsahujú principiálne chyby?

1. pokus o riešenie

Kôň na bielom políčku šachovnice ohrozuje iba čierne políčka a kôň na čiernom políčku ohrozuje iba biele políčka. Preto keď umiestnime 32 koňov na biele políčka, tak sa nebudú ohrozovať. Ak by sme umiestňovali 33 koňov, tak z Dirichletovho princípu by musel byť jeden kôň na čiernom políčku a ten by bol ohrozovaný. Preto najviac môžeme umiestniť 32 koňov.

2. pokus o riešenie

Vyskúšaním všetkých možností zistíme, že na šachovnicu rozmerov 2×4 vieme umiestniť najviac 4 koňov. Celú šachovnicu 8×8 vieme rozdeliť na 8 oblastí 2×4. Už vieme, že v každej z nich môže byť najviac 8 políčok. Preto na celej šachovnici môže byť najviac $8 \cdot 4 = 32$ koňov. Preto najviac môžeme umiestniť 32 koňov.

Ako riešiť a ako spísať riešenie

Najviac priamočiare použitie Dirichletovho princípu vyzerá zhruba takto:

1. Prečítame si zadanie a zistíme, koľko prvkov máme nájsť a s akou vlastnosťou. Prvky budú naše holuby.
2. Odhadneme, koľko holubníkov (množín) chceme mať, (formálne veľkosť množiny, do ktorej budeme definovať zobrazenie).
3. Pokiaľ v zadaní vyberáme niekoľko prvkov z nejakej množiny (čísla, políčka zo šachovnice), rozdelíme východziu množinu na niekoľko množín – holubníkov. Pre každú z týchto množín musí platiť, že ľubovoľné dva prvky z nej musia mať hľadanú vlastnosť. Rozdelenie hľadáme skúšaním, kreslením, ako by to mohlo vyzerať, čo by množiny mohli obsahovať.
4. Spíšeme riešenie.

Samozrejme, sú úlohy, napr. úloha o súvislej podpostupnosti z prednášky, v ktorých treba použiť Dirichletov princíp viac sofistikovane a na prvý pohľad nie je jasné, čo budú holuby a čo holubníky.

Riešenie úlohy 23 Ukážeme, že riešením úlohy je 11.

Ukážeme, že menej ako 11 čísel nám vybrať nestačí – vtedy totiž vyberieme čísla $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$ (alebo ich podmnožinu). Vidíme, že žiadne dve z týchto čísel sa nedelia.

Ukážeme, že ak vyberieme aspoň 11, tak sú medzi nimi dve, z ktorých jedno delí druhé. Rozložme si množinu $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ nasledovne (na 10 holubníkov):

$M_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $M_5 = \{9, 18\}$, $M_9 = \{17\}$,
$M_2 = \{3, 6, 12\}$, $M_6 = \{11\}$, $M_{10} = \{19\}$.
$M_3 = \{5, 10, 20\}$, $M_7 = \{13\}$,
$M_4 = \{7, 14\}$, $M_8 = \{15\}$,

Vidíme[1], že ak z ľubovoľnej množiny M_i vyberieme dva prvky, tak jeden bude deliť druhý. Keďže z množiny M vyberáme aspoň 11 čísel, ale máme iba 10 množín (čo je menej), tak z Dirichletovho princípu musíme vybrať dve čísla a, b z tej istej množiny M_i. Vďaka našej voľbe množín M_i pre tieto dve čísla a, b platí, že jedno delí druhé. Tým sme dokázali, čo sme mali. □

Viac formálny záver Nech B označuje m-prvkovú množinu vybraných čísel ($m > 11$). Uvažujme teraz pre $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ množiny $A_i = M_i \cap B$. Pre tieto množiny platí

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (M_1 \cap B) \cup (M_2 \cap B) \cup \cdots \cup (M_{10} \cap B) = (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{10}) \cap B = \{1, 2, \dots, 20\} \cap B = B.$$

Preto podľa dirichletovho pricnípu existuje $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ také, že A_i obsahuje aspoň dva prvky, označme ich a, b. Keďže a, b patria do M_i, tak jedno delí druhé.

Nápovedy k riešeniam

5. Rozdeľte si čísla podľa zvyškov: $\{0\}, \{1, 99\}, \ldots, \{49, 51\}, \{50\}$

6. Ak majú čísla navzájom rôzne zvyšky, je to predchádzajúca úloha. Čo ak niektoré dve čísla majú rovnaký zvyšok?

7. Rozdeľte si čísla $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2n - 1, 2n\}$

8. Priraďte vekotru jeho posledné 4 bity.

9. Rozdeľte si trojuholník strednými priečkami na štyri menšie trojuholníky.

10. Spočítajte, koľko rôznych škôd môže bača utrpieť v daný deň.

11. Nájdite najprv súvislý úsek dní, počas ktorého vlk zje počet oviec deliteľný 15-timi. Nie je na to 9 týždňov veľa? Môže to byť iný násobok 15-tich ako práve 15?

13. 12

14. $5k + 2$

15. 8, K: diagonála, O: rozdeľte si si šachovnicu na stĺpce.

16. 14, K: prvý a posledný riadok bez dvoch rohov, O: rozdeľte si šachovnicu na 14 oblastí po uhlopriečkach (s malou obmenou)

19. 32, K: čierne políčka, O: rozdeľte si šachovnicu na dvojice políčok, z ktorých sa kone navzájom ohrozujú

20. 32

21. 15, O: rozdeľte si šachovnicu na uhlopriečky rovnobežné s `a1--h8`.

22. 2, na každej farbe vie byť len jeden

23. Každému číslu priraďte jeho najväčšieho nepárneho deliteľa.

24. $19/6 > 3$, preto jedno číslo musí padnúť aspoň 4-krát

25. 34

26. $15k + 4$

27. Rozdeľte si šachovnicu na 8 „uhlopriečok“ po 8 políčok – ak uhlopriečka narazí na stranu štvorca, tak pokračuje z druhej strany.

29. Rozdeľte si šachovnicu po stĺpcoch.

30. Rozdeľte si šachovnicu po stĺpcoch. V minimalizačných (maximalizačných) úlohách používame skratku K na konštrukciu optimálneho rozmiestnenia a skratku O na odhad, že menej (viac) ako spománané minimum (maximum) nemožno dosiahnuť.