Cvičenie 6A: Počítanie dvomi spôsobmi

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí
$$2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}.$$

$\rightarrow$ **Úloha 2.** Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí
$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}.$$

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí
$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}.$$

$\rightarrow$ **Úloha 4.** Dokážte, že pre všetky $n, m, k \in \mathbb{N}$ platí
$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m}.$$

$\rightarrow$ **Úloha 5.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
$$3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3 = \binom{3n}{3}.$$

Úloha 6. Dokážte, že pre všetky $n, r, s, t \in \mathbb{N}$ platí
$$\binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{s-t} = \binom{n}{s}\binom{s}{t}\binom{n-s}{r-t}.$$

Úloha 7. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

$\rightarrow$ **Úloha 8.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

$\rightarrow$ **Úloha 9.** Vypočítajte sumu
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)\binom{n}{k}.$$

Úloha 10. Vypočítajte sumu
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k\binom{n}{k}.$$

Úloha 11. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Úloha 12. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 13.** Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Úloha 14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2}.$$

Úloha 15 (*)**.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

kde F_{n+1} je $(n+1)$-vé Fibonacciho číslo.

Úloha 16 (*)**.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^k.$$

Nápovedy k riešeniam

2. Z $n+1$ čísel losujeme k nerozlíšiteľných a jedno dodatkové.

3. Z n čísel losujeme k nerozlíšiteľných a jedno dodatkové.

4. Počet n-písmenových slov z písmen $\{a, b, c\}$ obsahujúcich práva m písmen a a práve k písmen b.

5. Máme po n prvkov na 3 kôpkach, chceme vyberať z nich n. Rozdelíme na prípady podľa toho, po koľko prvkov vyberáme z troch kôpok: $3+0+0$, $2+1+0$, $1+1+1$.

6. Počet slov dĺžky n z písmen $\{a, b, c, d\}$ takých, že počet a a b je s, počet b a c je r, počet b je t.

7. Počet podmnožín (ne)párnej veľkosti. Každá taká podmnožina je jednoznačne určená $n-1$ miestami charakteristického vektora.

8. Počet spôsobov, ako vylosovať z n čísel nejaký počet a jedno dodatkové číslo.

9. Počet n-písmenových slov z písmen $\{a, b, c\}$.

10. Počet n-písmenových slov z písmen $\{a, b, c\}$.

11. Z $2n$ prvkov vyberáme podmnožinu n prvkov: vyberieme k z prvých n a z druhých n prvkov vyberieme k, čo tam nie sú.

12. Počet n-písmenových slov z $\{a, b, c\}$ obsahujúcich presne k písmen a.

13. Počet $(k+1)$-prvkových podmnožín $(n+1)$-prvkovej množiny. Rozdelíme na prípady podľa najväčšieho prvku.

14. Počet permutácií čísel $1, 2, \ldots, n$, v ktorých sa 1 nachádza skôr ako 2. Rozdelíme podľa pozícií čísla 1.

15. Počet postupností zložených z čísel $\{1, 2\}$, ktorých súčet je n.

Riešenie matematickou indukciou

Počítanie dvomi spôsobmi, samozrejme, nie je jediný spôsob, ako dokazovať takéto identity. Vo väčšine prípadov si vieme vystečiť aj s úpravami výrazov a pri sumách si pomôžeme matematickou indukciou. Jej použitie ilustrujeme na úlohe 12, pričom ilustrujeme aj to, ako sa nad hľadaním takéhoto dôkazu zamýšľať.

Skúsme vymyslieť dôkaz indukciou nasledovnej úlohy:

Dokážte, že pre všetky prirodzené n, k platí

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}.$$

Hmm, indukciou, ale podľa ktorej premennej? Skúsme podľa premennej n. Znamená to teda, že hodnotu k budeme považovať za fixnú a pevne danú.

Čo v tomto kontexte predstavuje báza indukcie? Aké je najmenšie zmysluplné n, pre ktoré dokazovaná rovnosť má zmysel?

Môžeme si všimnúť, že suma na ľavej strane dokazovanej rovnosti prebieha hodnoty lokálnej premennej j od k po n. Ak je náhodou n menšie ako k, tak množina prípustných hodnôt premennej j je prázdna, a z definície je potom suma prázdnej postupnosti rovná nule.

Na druhej strane (rovnosti), akonáhle je $n < k$, tak kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ je z definície rovné nule – počet možností ako vybrať k-prvkovú podmnožinu z množiny ktorá sama má menej ako k prvkov je nula, taká možnosť neexistuje.

Najmenšia zmysluplná hodnota n pre pevné k je teda $n = k$. Preň dostávame na ľavej strane dokazovanej rovnosti

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{k} \binom{k}{j}\binom{j}{k} = \binom{k}{k}\binom{k}{k} = 1 \cdot 1 = 1$$

a na pravej strane

$$2^{n-k}\binom{n}{k} = 2^{k-k}\binom{k}{k} = 2^0 \cdot 1 = 1,$$

a teda pre $n = k$ dokazovaná rovnosť platí.

Skúsme teraz vykonať indukčný krok. Predpokladajme, že dokazovaná rovnosť platí pre nejaké prirodzené číslo $n \geq k$ a skúsme ju dokázať pre číslo $n + 1$.

Pozrime sa bližšie na sumu na ľavej strane rovnosti pre $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n+1} \binom{n+1}{j}\binom{j}{k} &= \sum_{j=k}^{n+1} \left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}\right] \cdot \binom{j}{k} \\
&= \sum_{j=k}^{n+1} \binom{n}{j}\binom{j}{k} + \sum_{j=k}^{n+1} \binom{n}{j-1}\binom{j}{k} \\
&= \sum_{j=k}^{n+1} \binom{n}{j}\binom{j}{k} + \sum_{j=k}^{n+1} \binom{n}{j-1}\left[\binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1}\right] \\
&= \sum_{j=k}^{n+1} \binom{n}{j}\binom{j}{k} + \sum_{j=k}^{n+1} \binom{n}{j-1}\binom{j-1}{k} + \sum_{j=k}^{n+1} \binom{n}{j-1}\binom{j-1}{k-1}
\end{aligned}$$

Prvá zo súm sa nápadne podobá na ľavú stranu indukčného predpokladu, má len drobnú kozmetickú vadu, naoko obsahuje jeden sčítanec navyše. Pri bližšom pohľade však zbadáme, že naozaj len naoko (z n-prvkovej množiny sa nedá vybrať $(n+1)$-prvková podmnožina):

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{n+1}\binom{n}{j}\binom{j}{k} &= \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k} + \binom{n}{n+1}\binom{n+1}{k}\\ &= 2^{n-k}\binom{n}{k} + 0\cdot\binom{n+1}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Druhá zo súm sa takisto tvári ako indukčný predpoklad, stačí použiť substitúciu $i = j-1$, a zahodiť prvý (nulový) sčítanec:

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{n+1}\binom{n}{j-1}\binom{j-1}{k} &= \sum_{i=k-1}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}\\ &= \binom{n}{k-1}\binom{k-1}{k} + \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}\\ &= \binom{n}{k-1}\cdot 0 + 2^{n-k}\binom{n}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Aj v tej tretej sume môžeme použiť substitúciu $i = j-1$. Dostávame

$$\sum_{j=k}^{n+1}\binom{n}{j-1}\binom{j-1}{k-1} = \sum_{i=k-1}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k-1}.$$

Posledná suma má presne taký tvar ako potrebujeme, ale nie pre n a k, ale pre zmenu pre n a $k-1$. Aby bol tento dôkaz indukciou korektný, nestačí nám indukčný predpoklad, že dokazovaná rovnosť platí pre n pri pevne zvolenom k. Aby sme dokázali rovnosť pre $n+1$ a k, potrebujeme sa oprieť o platnosť rovnosti pre dve dvojice: n a k a tiež n a $k-1$.

Čo teraz? V každom prípade sa treba vrátiť na začiatok a úvod nášho dôkazu indukciou prepísať tak, aby indukčný predpoklad dovoľoval zahrnúť okrem dvojice n a k aj dvojicu n a $k-1$.

Sú dve možnosti: Prvá je povedať, že v skutočnosti dôkaz robíme indukciou vzhľadom na číslo k, a vnútri tohoto dôkazu pre každé jedno pevné k robíme indukciu vzhľadom na premennú n. (Rozmyslite si sami, že pre $k = 0$ je tvrdenie triviálne platné.) V tomto kontexte, v okamihu keď sa snažíme dokázať rovnosť pre $n+1$ a k, môžeme z „veľkého“ indukčného predpokladu brať rovnosť za dokázanú pre $k-1$ a *akékoľvek* n, a z „malého“ indukčného predpoklad brať rovnosť za dokázanú pre *toto naše* k a *toto naše* n.

Druhá možnosť je povedať, že budeme robiť dôkaz indukciou pre dvojice (n,k) usporiadané (napríklad) podľa súčtu $n+k$. Indukčný predpoklad môžeme sformulovať napríklad v tvare „Predpokladajme, že rovnosť platí pre ľubovoľnú dvojicu n a k so súčtom najviac $s = n+k$“, a tvrdenie dokazovať pre dvojicu $n+1$ a k (so súčtom $s+1$, teda o jedna väčším). Vtedy môžeme z indukčného predpokladu využiť konkrétne dvojice n a k (so súčtom s) a tiež n a $k-1$ (so súčtom $s-1$).

Berme teda úvod dôkazu za opravený a indukčný predpoklad za rozšírený (okrem dvojice n a k) tak, že zahŕňa i dvojicu n a $k-1$. Potom tretia suma sa podľa indukčného predpokladu rovná

$$\sum_{j=k}^{n+1}\binom{n}{j-1}\binom{j-1}{k-1} = \sum_{i=k-1}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k-1} = 2^{n-(k-1)}\binom{n}{k-1}.$$

Dohromady dostávame, že

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n+1} \binom{n+1}{j} \binom{j}{k} &= 2^{n-k} \binom{n}{k} + 2^{n-k} \binom{n}{k} + 2^{n-(k-1)} \binom{n}{k-1} \\
&= 2 \cdot 2^{n-k} \binom{n}{k} + 2^{n-k+1} \binom{n}{k-1} \\
&= 2^{n-k+1} \cdot \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \\
&= 2^{n+1-k} \binom{n+1}{k},
\end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať.