Cvičenie 7B: Princíp inklúzie a exklúzie

Veta 1 (Princíp zapojenia a vypojenia)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú konečné množiny. Potom*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N} \\ 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n}} \left|\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j}\right|.$$

→ **Úloha 1.** V autobuse je celkovo 102 cestujúcich. 49 z nich hovorí po francúzky, 34 po anglicky a 21 po nemecky. Siedmi ľudia ovládajú francúzštinu aj angličtinu, piati francúzštinu aj nemčinu a deviati angličtinu a nemčinu. Všetkými troma jazykmi hovoria dvaja ľudia. Koľkí z cestujúcich nehovoria žiadnym z týchto troch jazykov? Koľko je takých ľudí, ktorí nehovoria po francúzky, ale za to ovládajú angličtinu alebo nemčinu?

Úloha 2. Študenti sa mali podrobiť trom skúškam. Zo 124 študentov zložilo len prvú 22, prvú a druhú zložilo 28, druhú a tretiu 52, len druhú 12, prvú alebo tretiu (aspoň jednu z nich) 96, všetky tri 20, ani prvú ani druhú 30. Koľko študentov nespravilo ani jednu skúšku? Koľko ich ešte bude robiť jednotlivé skúšky?

Úloha 3. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ je deliteľných aspoň jedným z čísel 2 a 3?

Úloha 4. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ je deliteľných aspoň jedným z čísel 2, 3 a 5?

Úloha 5. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ nie je deliteľných žiadnym z čísel 2, 3 a 7?

Úloha 6. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ nie je druhou ani treťou mocninou žiadneho prirodzeného čísla?

→ **Úloha 7.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) obsahujú aspoň jednu z postupností $(1, 2, 3)$ alebo $(4, 5, 6)$ ako súvislú podpostupnosť?

→ **Úloha 8.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, ani $(42, 44, 8, 55)$?

→ **Úloha 9.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré obsahujú aspoň jednu z postupností $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ alebo $(7, 8, 9)$ ako súvislú podpostupnosť?

→ **Úloha 10.** Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, $(47, 17, 57)$ ani $(42, 44, 8, 100)$?

Úloha 11. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, $(100, 1, 8)$, ani $(42, 44, 8, 55)$?

Úloha 12. Vyriešte úlohy 7 až 11 pre prípad, že uvažované podpostupnosti nemusia byť súvislé.

→ **Úloha 13.** Máme tri jednoeurové mince, štyri dvojeurové mince a päť trojeurových mincí. Koľkými spôsobmi z nich možno vybrať desať mincí?

Úloha 14. Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22.$$

Koľko existuje celočíselných riešení tejto rovnice takých, že platí $0 \le x_1 \le 7$, $0 \le x_2 \le 11$, $0 \le x_3 \le 5$ a $0 \le x_4 \le 8$?

→ **Úloha 15.** Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22.$$

Koľko existuje celočíselných riešení tejto rovnice takých, že platí $2 \le x_1 \le 7$, $-1 \le x_2 \le 8$, $0 \le x_3 \le 5$ a $-2 \le x_4 \le 9$?

Úloha 16. Koľko prešmyčiek neobsahujúcich tri rovnaké písmená za sebou je možné vytvoriť zo slova `ANTANANARIVO`?

V nasledujúcich úlohách môžete vo výsledku uviesť jednu sumu.

→ **Úloha 17.** Koľko existuje $2n$-prvkových postupností, ktoré

- každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ obsahujú práve dvakrát a zároveň
- obsahujú aspoň na jednom mieste dve rovnaké čísla vedľa seba?

→ **Úloha 18.** Fakulta ponúka 60 voliteľných predmetov. Každý zo 100 prvákov si vyberie práve jeden voliteľný predmet. Koľkými spôsobmi si môžu študenti vybrať predmety, ako každý voliteľný predmet si vybral aspoň jeden študent?

Úloha 19. Na Matfyze je 100 (rozlíšiteľných) študentov a 40 učební očíslovaných od 1 po 40. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť študentov do učební, ak nesmie existovať učebňa, v ktorej sú práve 3 študenti.

Úloha 20. Koľkými spôsobmi možno v kine posadiť n manželských párov do poslednej rady, kde je $2n$ miest, tak, aby žiaden manželský pár nesedel vedľa seba?

Úloha 21. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) neobsahujú súvislú podpostupnosť $(i, i+1)$ pre $i \in \{1, \ldots, 99\}$?

Úloha 22. Koľko celočíselných riešení, takých že pre každé $i \in 1, 2, \ldots, n$ platí $0 \leq x_i \leq 47$ má rovnica

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s?$$

Výsledky úloh

1. 17 žiadnym, 50 nie francúzsky, ale anglicky alebo nemecky

3. $\left\lfloor \frac{5000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{6} \right\rfloor = 483$

4. $\left\lfloor \frac{5000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{30} \right\rfloor = 3666$

5. $5000 - \left\lfloor \frac{5000}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{42} \right\rfloor = 1429$

6. $5000 - \lfloor \sqrt{5000} \rfloor - \lfloor \sqrt[3]{5000} \rfloor + \lfloor \sqrt[6]{5000} \rfloor = 5000 - 70 - 17 + 4 = 4917$

7. $2 \cdot 98! - 96!$

8. $100! - 98! - 97! + 95!$

9. $3 \cdot 98! - 3 \cdot 96! + 94!$

10. $100! - 2 \cdot 98! - 97! + 96! + 2 \cdot 95! - 93!$

11. $100! - 98! - 98! - 97! + 96! + 95! + 0 - 0,$

12. Úloha 7: $2 \cdot \frac{100!}{3!} - \frac{100!}{3! \cdot 3!}$
Úloha 8: $100! - \frac{100!}{3!} - \frac{100!}{4!} + \frac{100!}{3! \cdot 4!}$
Úloha 9: $3 \cdot \frac{100!}{3!} - 3 \cdot \frac{100!}{3! \cdot 3!} + \frac{100!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}$
Úloha 10: $2 \cdot \frac{100!}{3!} + \frac{100!}{4!} - \frac{100!}{3! \cdot 3!} - 2 \cdot \frac{100!}{3! \cdot 4!} + \frac{100!}{3! \cdot 3! \cdot 4!}$
Úloha 11: $100! - 2 \cdot \frac{100!}{3!} - \frac{100!}{4!} + \frac{100!}{3! \cdot 3!} + \frac{100!}{3! \cdot 4!} + \frac{100!}{6!}\binom{4}{2} - \frac{100!}{3! \cdot 6!}\binom{4}{2} = \frac{2}{3} \cdot 100!$

13. $C'(3, 10) - C'(3, 6) - C'(3, 5) - C'(3, 4) + C'(3, 1) + C'(3, 0) + 0 - 0 =$
$= \binom{12}{10} - \binom{8}{6} - \binom{7}{5} - \binom{6}{3} + \binom{3}{1} + 1 = 6$

14. $C'(4,22)-C'(4,14)-C'(4,10)-C'(4,16)-C'(4,13)+C'(4,2)+C'(4,8)+C'(4,5)+C'(4,4)+C'(4,1)+C'(4,7) =$
$= \binom{25}{3} - \binom{17}{3} - \binom{13}{3} - \binom{19}{3} - \binom{16}{3} + \binom{5}{3} + \binom{11}{3} + \binom{8}{3} + \binom{7}{3} + \binom{4}{3} + \binom{10}{3} = 195$

15. $C'(4,23) - 2C'(4,17) - C'(4,13) + 2C'(4,7) + 2C'(4,5) =$
$= \binom{26}{3} - 2\binom{20}{3} - \binom{16}{3} + 2\binom{10}{3} + 2\binom{8}{3} = 56$

16. $\frac{12!}{4! \cdot 3!} - 10 \cdot \frac{9!}{4!} - (\frac{9!}{3!} + 9 \cdot 8 \cdot \frac{8!}{3!}) + (7! + 7 \cdot 6 \cdot 6!) = 2\,666\,160$

17. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(2n-k)}{2^{n-k}}$

20.

21. $\sum_{k=0}^{99} (-1)^k \binom{99}{k} (100-k)!$

22.

Ako riešiť úlohy princípom inklúzie a exklúzie?

V zásade ide o jednoduchý postup. Určíme si, na ktoré množiny chceme PIE použiť a „len dosadíme do vzorca“. Nakoľko však ide o pomerne zložitý vzorec, tak tento postup vysvetlíme slovne v jednotlivých krokoch, ktoré opisujú, čo sa vlastne vo vzorce na PIE deje.

1. Ujasníme si, či chceme pomocou PIE počítať dobré alebo zlé možnosti.
2. Rozdelíme si všetky možnosti na niekoľko, povedzme n, skupiniek.
3. Vypočítame, koľko možností sa nachádza v prieniku **fixných** k skupín. Pri tom si treba uvedomiť, čo vlastne za možnosti v tomto prieniku máme, ako ich kombinatoricky opísať.
   - POZOR! Pri niektorých úlohách tento výsledok nemusí závisieť iba od k, ale môže závisieť aj od toho, ktoré skupinky berieme do prieniku. Napr. úloha 1 z: `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg22/du/du3-riesenie.pdf`
4. Určíme hodnotu S_k tak, že pre dané k nasčítame výsledky z predošlého bodu cez všetky možné k-tice skupín.
5. Dosadíme hodnotu S_k do vzorca pre PIE: počítané možnosti $= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$, príp. ak sme cez PIE vyjadrovali zlé možnosti, tak môžeme rovno vypočítať dobré ako $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k$

Riešenie úlohy 19 podľa predošlého návodu

Toto riešenie ilustruje spomenutý návod aj so zopár úvodnými komentármi, ako na riešenie prísť a ako začať. Nepoužíva veľmi formálny jazyk, no stále dobre zachycuje ako funguje PIE.

1. Vieme nejako zaručiť, že neexistuje učebňa s 3 študentmi? Nebude ľahšie uvažovať možnosti, kde existuje nejaká učebňa s 3 študentmi? Existencia sa nám ľahšie uchopí, lebo si vieme možnosti rozdeliť na prípady podľa toho, v ktorej učebni sú práve 3 študenti. Budeme teda počítať zlé možnosti
2. Počítame zlé možnosti, teda možnosti rozdelenia študentov, kde existuje učebňa s práve 3 študentmi. Tieto možnosti si rozdelíme na 40 skupín. Skupina číslo i obsahuje tie možnosti, kde v miestnosti i sú 3 študenti (nevylučujeme však existenciu iných možností s 3 študentmi). Sú tieto skupinky disjunktné? Nie. Nemôžeme teda použiť pravidlo súčtu, ale použijeme PIE.

3. Uvažujme nejakých fixných k skupiniek. Koľko možností sa nachádza v ich prieniku? Ako vieme opísať, o aké možnosti ide? Ide o také možnosti, kde máme nejakých fixných k učební, v ktorých sú 3 študenti. Určme počet takýchto možností. Najprv postupne obsadíme daných k miestností. Do i-tej miestnosti ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) vyberieme troch študentov spomedzi $100 - 3(i-1)$ (lebo už $3(i-1)$ študentov je v predošlých miestnostiach). Počet možností na tieto výbery je
$$\prod_{i=1}^{k} \binom{100-3(i-1)}{3} = \binom{100}{3}\binom{97}{3}\cdots\binom{100-3k+3}{3} = \frac{100^{\underline{3}}}{3!} \cdot \frac{97^{\underline{3}}}{3!} \cdot \dots \cdot \frac{(100-3k+3)^{\underline{3}}}{3!} = \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k}.$$
Potom nám ostane $(100 - 3k)$ študentov, z ktorých každý má na výber ľubovoľnú zo $40 - k$ zvyšných učební. Spolu tak máme
$$\frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k} \qquad \text{možností.}$$
Vyšlo nám to teraz pekne, že tento počet možností závisí len na čísle k. Nezávisí na tom, ktorých k učební uvažujeme.

4. Určíme číslo S_k, ktoré dostaneme sčítaním výsledkov z predošlej pre všetky možné výbery k skupiniek. Takýchto výberov je $\binom{40}{k}$ a každému zodpovedá rovnaký počet možností, preto
$$S_k = \binom{40}{k} \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k}.$$
Všimnite si, že v tomto prípade nehovoríme o možnostiach, nakoľko S_k nevyjadruje počet možností. Ide o súčet veľa čísel. V konečnom dôsledku sú niektoré možnosti v S_k započítané raz, iné dvakrát, a niektoré možno aj 17-krát.

5. Už len dosadíme do vzorca pre PIE. Môžeme rovno použiť vzorec na dobré možnosti (Dôsledok 3.22) alebo rozdiel všetkých a zlých možností. Zvolíme druhú možnosť a tak dostaneme výsledný počet možností:
$$40^{100} - \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} S_k = 40^{100} + \sum_{k=1}^{40} (-1)^k \binom{40}{k} \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k} = \sum_{k=0}^{40} (-1)^k \binom{40}{k} \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k}.$$

Formálnejšie riešenie

Nech pre $i \in \{1, 2, \dots, 40\}$ M_i označuje počet takých rozdelení študentov, kde v miestnosti číslo i sú práve 3 študenti. Hľadané možnosti vieme vyjadriť ako $(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{40})^C$, čo je podľa Dôsledku 3.22 Princípu inklúzie a exklúzie rovné
$$\sum_{k=0}^{40} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}|. \tag{1}$$
Množina $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}$ označuje počet rozdelení, kde v učebniach $i_1, i_2, \dots, i_k$ sú práve traja študenti. Určme teraz ich počet: Najskôr vyberieme usporiadanú $3k$-ticu študentov $(s_1, s_2, \dots, s_{3k})$, na čo máme $100^{\underline{3k}}$ možností – to budú študenti, čo sú v miestnostiach $i_1, i_2, \dots, i_k$. Študentov $s_{3j-2}, s_{3j-1}, s_{3j}$ priradíme do učebne i_j pre $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ (teda prví traja idú do učebne i_1, druhý traja do učebne i_2, …). Nakoľko nám však nezáleží na tom, v akom poradí študentov dáme do miestnosti, každé z $3! = 6$ poradí študentov v rámci jednej miestnosti $s_{3j-2}, s_{3j-1}, s_{3j}$ vedie k rovnakému rozdeleniu. Celkovo tak máme každú možnosť započítanú 6^k-krát. Nakoniec už len každému zo zvyšných $100 - 3k$ nevybraných študentov priradíme ľubovoľnú zo zvyšných $40 - k$ miestností, na čo máme $(40-k)^{100-3k}$ možností. Spojením týchto úvah teda máme
$$|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}| = \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k}.$$
Teraz už len dosadíme späť do (1) a máme
$$\sum_{k=0}^{40} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k} = \sum_{k=0}^{40} (-1)^k \binom{40}{k} \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k},$$
čo je hľadaný počet možností.