Cvičenie 9B: Relácie ekvivalencie a rozklady

Úloha 1. Aké relácie poznáte zo strednej školy alebo z bežného života? Určte o nich, či sú reflexívne, ireflexívne, symetrické, tranzitívne, príp. ďalšie vlastnosti.

Úloha 2. Nech $|A| = n \in \mathbb{N}$. Určite koľko relácií je na množine A

a) reflexívnych?

b) symetrických?

c) reflexívnych a symetrických?

d) symetrických a nie reflexívnych?

e) (*) tranzitívnych

f) (*) symetrických, reflexívnych a nie tranzitívnych?

→ **Úloha 3.** Uvažujme relácie

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \geq 1\} \qquad \text{a} \qquad T = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 6 \mid a + b\}.$$

Rozhodnite o nich, či sú reflexívne, ireflexívne, symetrické a tranzitívne.

Úloha 4. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna:

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle -1, 1\rangle\}$

→ b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 + 4y^2 < 4xy\}$

→ c) Relácia U na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in U \Leftrightarrow 47 \in x \cap y$.

d) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ac = bd$

e) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

f) $| = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(b = k \cdot a)\}$

g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ \sin x = \sin y\}$

h) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 7 \mid a + b\}$

i) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.

j) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cup y = \mathbb{Z}$.

k) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.

l) Relácia P na $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, taká že $(A, B) \in P \Leftrightarrow |A| = |B|$, kde $|M|$ označuje počet prvkov (konečnej) množiny M.

m) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ c - d = 4\}$

n) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (cd + 100)(cd - 60) = 0\}$

o) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |x + y||x - y| \leq 3\}$

p) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (|a + b| - 24)(|a - b| - 24) = 0\}$

q) $S = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

r) $T = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

s) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle 0, 1\rangle\}$

t) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 = 2y^2\}$

u) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x = 2^y$

v) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 100$

w) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

x) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

y) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow 3 \mid x^2 + y^2$

Úloha 5. Dokážte, že pre každú reláciu R na množine M platí:

a) R je reflexívna práve vtedy, keď $\mathrm{id}_M \subseteq R$

b) R je ireflexívna práve vtedy, keď $\mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

c) R je symetrická práve vtedy, keď $R^{-1} \subseteq R$

d) R je tranzitívna práve vtedy, keď $RR \subseteq R$

e) R je asymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} = \emptyset$

f) R je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_M$

Možno v podúlohách a), c), d) a f) nahradiť $\subseteq$ za $=$?

→ **Úloha 6.** Na množine študentov gymnázia definujeme reláciu „byť spolužiakom“. Dokážte, že ide o reláciu ekvivalnecie. Čo je rozklad, ktorý určuje?

→ **Úloha 7.** Dokážte, že relácia

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 5 \mid (a - b)\}$$

je reláciou ekvivalencie na množine $\mathbb{Z}$. Opíšte, aký rozklad indukuje

a) ak ju zúžime na množinu $\{-10, -8, 1, 5, 16, 17, 20, 47, 49\}$,

b) na množine $\mathbb{Z}$.

→ **Úloha 8.** Dokážte, že relácia V z predošlej úlohy je reláciou ekvivalencie. Popíšte rozklad, ktorý indukuje

a) na množine $\{-10, -8, 1, 5, 16, 17, 20, 47, 49\}$,

b) na množine $\mathbb{Z}$.

Úloha 9. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo d je relácia $\equiv_d$ definovaná na $\mathbb{Z}$ tak, že

$$a \equiv_d b \Leftrightarrow d \mid (a - b),$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

Poznámka. Táto relácia sa nazýva *kongruencia* a veľmi často sa využíva v teórii čísel. Dáva do vzťahu práve také čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení číslom d. Miesto značenia $a \equiv_d b$ sa skôr používa $a \equiv b \pmod{d}$ (čítame a je kongruentné s b modulo d). Teda napr. $2 \equiv 47 \pmod{5}$, $12 \equiv 0 \pmod{2}$, $22 \equiv 50 \pmod{7}$.

→ **Úloha 10.** Dokážte, že relácia

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in Z\}$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

→ **Úloha 11.** Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine?

→ **Úloha 12.** Nech R a S sú relácie ekvivalencie na množine M. Uvažujme nasledovné relácie

a) $R \cup S$, b) $R \cap S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}.

Pre každú z podúloh nájdite príklad relácií R, S kedy výsledná relácia je opäť reláciou ekvivalencie; a taktiež príklad relácií R, S, kedy výsledná relácia nie je reláciou ekvivalencie. V prípade, že také relácie R, S nemožno nájsť, dokážte prečo.

Úloha 13. Nech R a S sú tranzitívne relácie. Čo viete povedať o tranzitívnosti relácií

a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}?

Musia byť vždy tranzitívne? Môžu byť pre niektoré voľby R, S tranzitívne a inokedy nie? Nebudú nikdy tranzitívne?

Úloha 14. Ktoré z relácií z predošlých cvičení sú reláciami ekvivalencie? Aký rozklad určujú?

Úloha 15. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na množine X. Dokážte, že aj $\bigcap_{R \in W} R$ je relácia ekvivalencie na množine X.