Cvičenie 10A: Usporiadania

→ **Úloha 1.** Uvažujme reláciu

$$R = \{(2,1), (3,1), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,5)\}$$

na množine $\{1,2,3,4,5,6\}$. Ide o reláciu usporiadania? Ak nie, ako ju treba upraviť, aby sme dostali usporiadanie? Ak máme usporiadanie, určte najväčšie, najmenšie, minimálne a maximálne prvky vzhľadom na toto usporiadanie.

→ **Úloha 2.** Uveďte príklad relácie usporiadania, ktoré má 2 minimálne a 5 maximálnych prvkov.

→ **Úloha 3.** Uveďte príklad relácie usporiadania, ktoré 3 minimálne a žiadne maximálne prvky.

Úloha 4. Pre zadané nezáporné celé čísla m, n nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m minimálnych prvkov.

Úloha 5. Pri každú z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určite, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

→ a) Relácia $\mid$ na $\mathbb{Z}$, kde $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\colon ka = b$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$

→ b) Relácia $\mid$ na $\mathbb{N} - \{1\}$, kde $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\colon ka = b$ pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$

c) $R = \{(a,a);\ a \in \mathbb{N}\} \cup \{(2a+1, 2a);\ a \in \mathbb{N}\}$ (na $\mathbb{N}$),

→ d) $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a \le c \wedge b \le d\}$,

e) $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a + b \le c + d\}$,

f) $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a + b < c + d\}$,

g) $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a + b < c + d \vee (a,b) = (c,d)\}$,

h) Relácia z predošlej podúlohy zúžená na množinu $M = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2;\ a \ge 5 \wedge b \ge 7 \wedge a + b \le 47\}$

i) (*) $R = \{(A,B) \in \mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N});\ \sum_{a \in A} 2^a \le \sum_{b \in B} 2^b\}$, kde $\mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N})$ označuje množinu konečných podmnožín nezáporných celých čísel.

j) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 7a \mid b \vee a = b\}$

k) $\preceq\, = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}$ [Riešenie]

Úloha 6. Možno na množine $\mathbb{N}^2$ definovať úplné usporiadanie?

Úloha 7. Z množiny čísel $M = \{1, 2, \ldots, 30\}$ si vyberáme nejaké podmnožiny tak, aby každé dve vybrané čísla boli nesúdeliteľné. Všetky takéto podmnožiny dáme do množiny $\mathcal{N}$. Teda

$$\mathcal{N} = \{X \subseteq M;\ \forall a, b \in X\colon\ \mathrm{NSD}(a,b) = 1\}.$$

a) Určte maximálne prvky množiny $\mathcal{N}$ vzhľadom na usporiadanie $\subseteq$. Existuje najväčší prvok?

b) Je pravda, že všetky tieto maximálne prvky majú rovnaký počet prvkov?

c) Určte maximálne prvky vzhľadom na ostré usporiadanie $\prec$ „mať viac prvkov ako“. Teda $A \preceq B \Leftrightarrow A = B \vee |A| < |B|$. Existuje najväčší prvok?

d) Koľko najviac čísel možno vybrať z množiny M tak, aby každé dve z vybraných čísel boli nesúdeliteľné?

→ **Úloha 8.** Pre neprázdnu množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ označuje $\max A$ najväčší prvok množiny A (vzhľadom na klasické usporiadanie $\le$). Nech $M = \{n \in \mathbb{N};\ 0 \le n \le 47\}$ a nech

$$R = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\});\ \max A < \max B \vee A = B\}.$$

Dokážte, že R je usporiadaním na množine $\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$ a nájdite všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich nájdených prvkov dokážte.

→ **Úloha 9.** Nájdite príklad upsoriadaní R a S na rovnakej neprázdnej množine M, aby relácie

a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}?

boli / neboli usporiadania. V prípade, že taká voľba R, S neexistuje, dokážte to.

Úloha 10. Nech R je usporiadanie na množine A a S je usporiadanie na množine B. Rozhodnite, či sú naslednové relácie usporiadaním:

a) relácia T na množine $A \times B$, kde $(a, b)T(c, d) \Leftrightarrow aRc \wedge bSd$,

b) relácia U na množine $A \times B$, kde $(a, b)U(c, d) \Leftrightarrow aRc \vee bSd$,

Úloha 11. Nech A, $I \neq \emptyset$ sú množiny a nech pre každé $i \in I$ je φ_i usporiadanie množiny A. Dokážte, že potom aj $\bigcap_{i \in I} \varphi_i$ je usporiadanie množiny A. Čo ak sú φ_i úplné usporiadania?

Poznámka. $\bigcap_{i \in I} \varphi_i = \{x;\ (\forall i \in I)(x \in \varphi_i)\}$