Cvičenie 12B: Grafy

→ **Úloha 1.** Načrtnite neorientovaný graf G s množinou vrcholov $2, 3, ..., 10$, kde vrcholy i a j sú spojené hranou vtedy a len vtedy, ak čísla i a j sú súdeliteľné.

a) Bude graf G súvislý? Určte počet komponentov súvislosti

b) Aký je maximálny stupeň vrchola v grafe G?

c) Aký je minimálny stupeň vrchola v grafe G?

→ **Úloha 2.** Rozhodnite, či existuje graf, ktorého vrcholy majú stupne:

a) 4, 3, 2, 2, 1, 0;

b) 4, 2, 2, 2, 1, 1;

c) 6, 4, 3, 3, 2, 2, 1;

d) 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;

e) 6, 6, 2, 2, 1, 1, 1, 1;

f) 5, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že v každom jednoduchom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.

→ **Úloha 4.** Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k-regulárny jednoduchý graf rádu n.

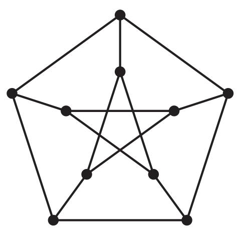
Úloha 5. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$.

Úloha 6. Nech $n, k \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$, ktoré majú práve k hrán.

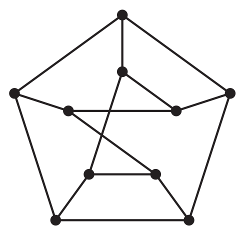
Úloha 7. Nájdite všetky navzájom neizomorfné 3-regulárne grafy rádu 6.

→ **Úloha 8.** Zistite, ktoré z nasledujúcich grafov sú izomorfné.

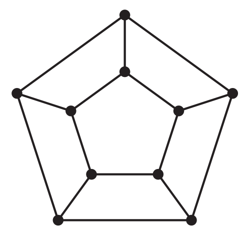
a)

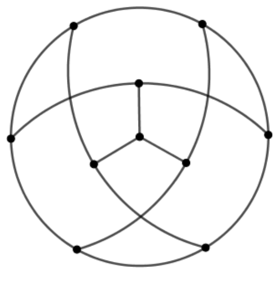


b)

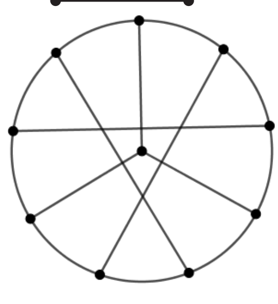


c)

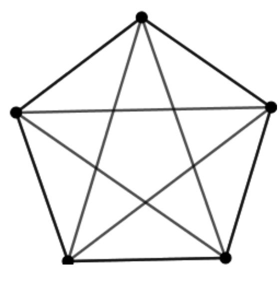




d)



e)



f)

→ **Úloha 9.** Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Úloha 10. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

Úloha 11. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

→ **Úloha 12.** Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

b) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

c) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj ťah začínajúci v u a končiaci vo v.

d) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

e) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

→ **Úloha 13.** Podľa riešenia predošlej úlohy navrhnite funkciu v Pythone, ktorá dostane ako parameter u-v-sled a vypíše na výstup u-v-cestu.