

Cvičenie 13A: Súvislosť a stromy

→ **Úloha 1.** Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Úloha 2. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n-1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

Úloha 3. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

-
- Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u - v -sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v .
 - Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u - v -ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v .
 - Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u - v -sled, tak existuje aj ťah začínajúci v u a končiaci vo v .
 - Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u .
 - Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u .

Úloha 4. Podľa riešenia predošlej úlohy navrhňte funkciu v Pythone, ktorá dostane ako parameter u - v -sled a vypíše na výstup u - v -cestu.

→ **Úloha 5.** Dokážte, že graf s minimálnym stupňom δ obsahuje

- cestu dĺžky $\delta + 1$;
- kružnicu dĺžky aspoň $\delta + 1$.

Úloha 6. Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý. (Komplementárny graf grafu G je taký graf G' , pre ktorý platí $V(G') = V(G)$ a $E(G') = \binom{V}{2} - E(G)$.)

Úloha 7. Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

Úloha 8. Dokážte, že ak graf $G = (V, E)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

Úloha 9. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

Úloha 10. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

Úloha 11. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.

→ **Úloha 12.** Koľko najmenej hrán môže obsahovať súvislý n -vrcholový graf?

Stromy

Definícia 1. *Strom* je súvislý acyklický graf (teda neobsahuje kružnicu).

Definícia 2. *List* stromu je vrchol stupňa 1.

Definícia 3. *Kostra* grafu G je podgraf grafu G , ktorý je strom a ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu G .

→ **Úloha 13.** Dokážte, že každý netriviálny strom má aspoň dva listy.

Úloha 14. Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na n vrchoch?

→ **Úloha 15.** Dokážte, že strom na n vrchoch má práve $n - 1$ hrán.

→ **Úloha 16.** Dokážte, že každý strom T má aspoň $\Delta(T)$ listov.

→ **Úloha 17.** Dokážte, že každý súvislý graf má kostru.

Úloha 18. O strome T vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,
- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom T listov?

Úloha 19. Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať v_1, v_2, \dots, v_n tak, že pre každé $i \geq 2$ má vrchol v_i práve jedného suseda v množine $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$.