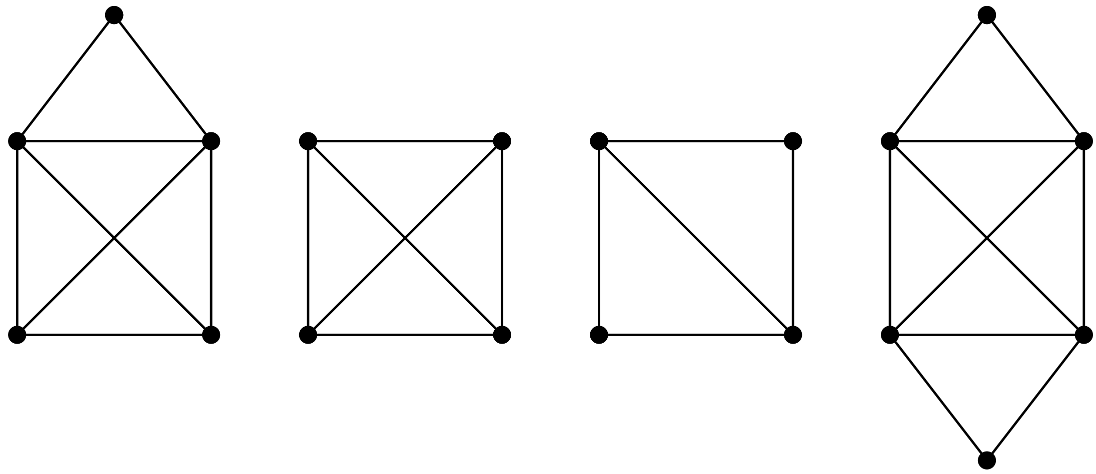
Cvičenie 13B: Eulerovské a bipartitné grafy

$\rightarrow$ **Úloha 1.** Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



$\rightarrow$ **Úloha 2.** Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

$\rightarrow$ **Úloha 3.** Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf K_n je eulerovský.

Úloha 4. Basketbalového tréningu sa zúčastňuje 17 hráčov. Tréning pozostáva z viacerých kôl. V prvom kole hrajú proti sebe dva 5-členné tímy. Po každom kole je jedna z pätíc vymenená piatimi hráčmi, ktorí toto kolo nehrali. Tí budú v ďalšom kole hrať proti pätici čo ostala. Žiaden hráč nehrá tri kolá po sebe. Je možné zostaviť rozpis turnaja tak, aby ľubovoľná kombinácia dvoch 5-členných tímov hrala práve raz proti sebe?

Začiatok takého rozpisu môže vyzerať nasledovne:

1. kolo: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ vs. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$
2. kolo: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ vs. $\{11, 12, 13, 14, 15\}$
3. kolo: $\{6, 8, 9, 16, 17\}$ vs. $\{11, 12, 13, 14, 15\}$ (teraz sme museli stiahuť tím $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, lebo nemôže hrať tri zápasy po sebe, tímy nie sú fixné, takže hráč 6 kľudne môže hrať s inými hráčmi ako v 1. kole)
4. kolo: $\{6, 8, 9, 16, 17\}$ vs. $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ (teraz sme museli stiahnuť tím $\{11, 12, 13, 14, 15\}$)

Bipartitné grafy

$\rightarrow$ **Úloha 5.** Dokážte, že pre každý bipartitný 3-regulárny graf s partíciami A, B platí $|A| = |B|$.

$\rightarrow$ **Úloha 6.** Nech G je súvislý bipartitný 3-regulárny graf. Dokážte, že ak z grafu G odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

Úloha 7. Nech G je súvislý bipartitný 3-regulárny graf. Dokážte, že ak z grafu G odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

Úloha 8. Dokážte, že každý strom je bipartitný.

$\rightarrow$ **Úloha 9.** Pre kladné celé číslo n uvažujme graf Q_n, ktorého vrcholy tvoria všetky n-členné postupnosti núl a jednotiek. Hranami sú spojené tie postupnosti, ktoré sa líšia práve v jednej pozícii (teda napr. $\{0110, 0100\} \in E(Q_4)$, ale $\{0110, 0101\} \notin E(Q_4)$). V závislosti od čísla n určte:

a) Koľko hrán má graf Q_n?

b) Je graf Q_n súvislý?

c) Je graf Q_n bipartitný?

d) Určte dĺžku najkratšej kružnice grafu Q_n.

e) Určte dĺžku najdlhšej kružnice grafu Q_n.

f) (*) Nájdite najmenšie také číslo d, že medzi každými dvoma vrcholmi grafu Q_n existuje cesta dĺžky najviac d.

→ **Úloha 10.** Posúďte správnosť nasledovného dôkazu.

Pokus o riešenie

Tvrdenie. Každý n-vrcholový graf G s $\delta(G) \geq 3$ obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n. Graf s minimálnym stupňom vrchola 3 musí mať aspoň 4 vrcholy. Ak $n = 4$, tak $G = K_4$ (úplný graf na 4 vrcholov), ktorý obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké n a dokážeme, že platí aj pre $n + 1$. Podľa indukčného predpokladu, n-vrcholový graf G obsahuje kružnicu dĺžky 4. Ak do grafu G pridáme nový vrchol stupňa aspoň 3, tak dostaneme $(n + 1)$-vrcholový graf G'. Nový graf G' má tiež minimálny stupeň aspoň 3 (lebo sme len pridali hrany) a stále obsahuje kružnicu dĺžky 4. Tvrdenie teda platí aj pre $n + 1$, čím je dôkaz indukciou hotový. □

→ **Úloha 11.** Na večierku sa stretlo $3n - 1$ ľudí, $n \in \mathbb{N}^+$. Niektoré dvojice ľudí sa medzi sebou poznajú (vzťah poznať sa je symetrický). Dokážte, že v každej takejto situácii existuje n navzájom disjunktných párov s vlastnosťou, že buď sa všetky páry medzi sebou poznajú, alebo sa žiaden z párov medzi sebou nepozná.