Riešenie 1. sady domácich úloh

Úloha 1

(0,5 boda) Rozhodnite a dokážte, či je nasledovný výrok pravdivý

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ \colon 11 \mid n^3 + 8.$$

Výrok je pravdivý, lebo pre $n = 9$ je číslo $n^3 + 8 = 737 = 67 \cdot 11$ deliteľné jedenástimi.

Komentár. Dávame do pozornosti, že takéto riešenie je naozaj postačujúce. Keď máme dokázať pravdivosť existenčného výroku, tak nám stačí ukázať jeden príklad, pre ktorý dostaneme pravdu. Vyhovujúci príklad sa dal ľahko nájsť postupným skúšaním, pričom si môžeme pomôcť kalkulačkou alebo počítačom. Taktiež sa dal využiť rozklad $n^3 + 8 = n^3 + 2^3 = (n + 2)(n^2 + 2n + 4)$, z čoho ľahko vidíme, že deliteľnosť jedenástimi dosiahneme ak $n + 2 = 11$.

Úloha 2

(1,5 boda) Nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(x)$ a $b(x)$, aby po ich dosadení do výroku

$$[\forall x \in M \colon (\neg a(x) \vee \neg b(x))] \Rightarrow [(\forall x \in M \colon (a(x) \Rightarrow b(x))) \vee (\forall x \in M \colon (b(x) \Rightarrow a(x)))]$$

sme dostali a) pravdivý, b) nepravdivý výrok. Správnosť vašich volieb dokážte.

Ľahko sa dá nájsť príklad, kedy nám vyjde pravda. Uvedieme jeden zložitejší (a pomerne náhodný) a jeden jednoduchší. Nájsť príklad pre nepravdu bolo o niečo náročnejšie. Najprv uvedieme jeden príklad a potom ukážeme, ako sme ho mohli objaviť.

a) Príklad s pravdou 1 Zvolíme $M = \mathbb{N}$, $a(x) \Leftrightarrow 3 \mid x$, $b(x) \Leftrightarrow x > 5$. Po dosadení máme výrok:

$$[\forall x \in \mathbb{N} \colon (3 \nmid x \vee x \leq 5)] \Rightarrow [(\forall x \in \mathbb{N} \colon (3 \mid x \Rightarrow x > 5)) \vee (\forall x > 5 \in \mathbb{N} \colon (x > 5 \Rightarrow 3 \mid x))].$$

Na ľavej strane máme výrok $\forall x \in \mathbb{N} \colon (3 \nmid x \vee x \leq 5)$, ktorý je nepravdivý, lebo pre $x = 6$ neplatí $3 \nmid 6 \vee 6 \leq 5$.

a) Príklad s pravdou 2 Zvolíme $M = \emptyset$, potom po vyhodnotení kvantifikovaných výrokov máme

$$1 \Rightarrow [1 \vee 1],$$

čo je pravdivý výrok.

b) Príklad s nepravdou Nech $M = \{2, 3\}$, $a(x) \Leftrightarrow x = 2$ a $b(x) \Leftrightarrow x = 3$. Potom dostávame výrok

$$[\forall x \in M \colon (x \neq 2 \vee x \neq 3)] \Rightarrow [(\forall x \in M \colon (x = 2 \Rightarrow x = 3)) \vee (\forall x \in M \colon (x = 3 \Rightarrow x = 2))].$$

1. Výrok $\forall x \in M\colon (x \neq 2 \vee x \neq 3)$ je pravdivý, keďže pre $x = 2$ platí $x \neq 3$ a pre $x = 3$ platí $x \neq 2$. (Teda pre každé $x \in \{2, 3\}$ platí $x \neq 2 \vee x \neq 3$.)
2. Výrok $\forall x \in M\colon (x = 2 \Rightarrow x = 3)$ je nepravdivý, lebo pre $x = 2$ dostávame $1 \Rightarrow 0$.
3. Výrok $\forall x \in M\colon (x = 3 \Rightarrow x = 2)$ je nepravdivý, lebo pre $x = 3$ dostávame $1 \Rightarrow 0$.

Čiže máme $1 \Rightarrow [0 \vee 0]$, čo je nepravda.

Ako nájsť príklad pre b)? Výrok má formu implikácie. Ak chceme, aby bola nepravdivá, musí byť jej ľavá strana $\forall x \in M\colon (\neg a(x) \vee \neg b(x))$ pravda a pravá strana $(\forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(x))) \vee (\forall x \in M\colon (b(x) \Rightarrow a(x)))$ nepravdivá. Na pravej strane máme nepravdivú disjunkciu, preto oba jej výroky musia byť nepravdivé. Platí teda

1. $\forall x \in M\colon (\neg a(x) \vee \neg b(x)) \equiv 1$,
2. $\forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \equiv 0$
3. $\forall x \in M\colon (b(x) \Rightarrow a(x)) \equiv 0$

Tieto pozorovania si vieme zaznačiť do tabuľky pre výrokové formy $a(x)$, $b(x)$:

x	$a(x)$	$b(x)$
x_1	1	0
x_2	0	1

Aby sme porušili výrok 2., tak v niektorom riadku (prvok tohto riadku sme si označili x_1) tabuľky musíme mať 1 pre $a(x)$ a 0 pre $b(x)$. Pre porušenie výroku 3. zas musíme pridať riadok (nech to je $x = x_2$) s 0 pre $a(x)$ a 1 pre $b(x)$. Aby sme splnili výrok 1., tak v každom riadku musíme mať aspoň jednu nulu – a to už máme splnené, takže nemusíme nič pridávať.

Úloha 3

(1,5 boda) Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí rovnosť

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Rovnosť dokážeme matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 2$ dostávame rovnosť $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} = \frac{2}{2+1}$, teda $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, čo platí.

Indukčný krok. Teraz uvažujme ľubovoľné celé $n \geq 2$. Predpokladajme, že platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{IP}$$

Dokážeme, že potom platí aj

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Zoberieme si ľavú stranu a upravujme ju s využitím indukčného predpokladu.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Tým sme dokázali, čo sme chceli. Dôkaz indukciou je tak hotový.

Úloha 4

(1,5 boda) Rozhodnite, či zložený výrok

$$[(a \Rightarrow b) \wedge \neg c] \vee [(d \wedge (e \Rightarrow b)) \Rightarrow (c \vee \neg e)]$$

je tautológia. Vaše tvrdenie dokážte.

Sporom ukážeme, že zadaný výrok je tautológia. Pre spor predpokladajme, že to nie je tautológia. To znamená, že pre nejaké ohodnotenie elementárnych výrokov a, b, c, d, e je výrok nepravdivý, teda:

1. $[(a \Rightarrow b) \wedge \neg c] \vee [(d \wedge (e \Rightarrow b)) \Rightarrow (c \vee \neg e)] \equiv 0$
2. $(a \Rightarrow b) \wedge \neg c \equiv 0$ (z 1.)
3. $(d \wedge (e \Rightarrow b)) \Rightarrow (c \vee \neg e) \equiv 0$ (z 1.)
4. $d \wedge (e \Rightarrow b) \equiv 1$ (z 3.)
5. $c \vee \neg e \equiv 0$ (z 3.)
6. $d \equiv 1$ (zo 4.)
7. $e \Rightarrow b \equiv 1$ (zo 4.)
8. $c \equiv 0$ (z 5.)
9. $\neg e \equiv 0$ (z 5.)
10. $e \equiv 1$ (z 9.)
11. $b \equiv 1$ (z 7. a 10.)
12. $a \Rightarrow b \equiv 0$ (z 2., lebo $\neg c \equiv 1$ podľa 8., takže nepravdivý musí byť prvý výrok)
13. $b \equiv 0$ (z 12.) – spor s 11.