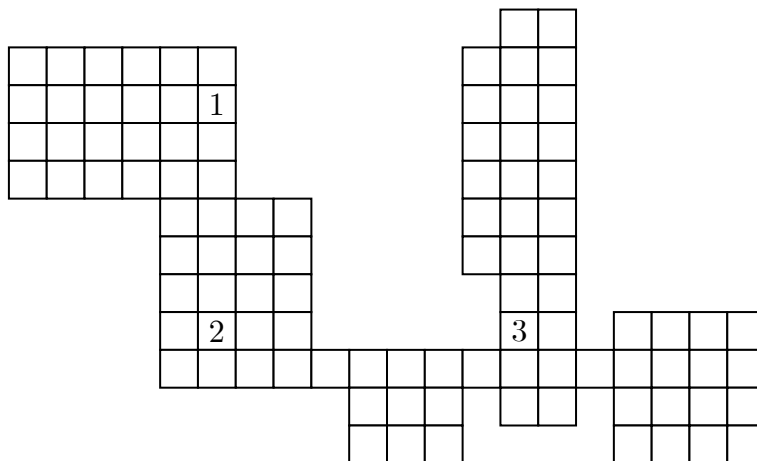


2. sada domácich úloh

Termín odovzdania: streda 30. 11. 2024, 23:59

V prípade odovzdávania cez MS odovzdajte všetky riešenia ako 1 PDF súbor. Výnimkou sú programy, ktoré vytvoríte vrámci bonusových úloh – tie nahrajte osobitne k PDF súboru s riešeniami.

Úloha 1. (1,5 boda) Uvažujme plán MatFyzu ako na obrázku nižšie. Koľko najviac veží vieme umiestniť na políčka tohto plánu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali? Vaše tvrdenie zdôvodnite. Veža ohrozuje políčka, na ktoré sa vie pohnúť tak, že ostane vo svojom riadku alebo stĺpci a pritom nevyjde mimo MatFyz (teda veže 1 a 2 sa ohrozujú, ale 2 a 3 nie).



Úloha 2. (1,5 boda) Rozhodnite a následne dokážte, či pre ľubovoľné dve množiny A, B platí:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) - (\mathcal{P}(A - B) \cup \mathcal{P}(B - A)) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A - B)$

b) $\mathcal{P}(A \cup B) - (\mathcal{P}(A - B) \cup \mathcal{P}(B - A)) \supseteq \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A - B)$

Úloha 3. (2 body) Určte, koľko je všetkých

- 3-ciferných čísel, ktorých prvá cifra (na mieste stoviek) je deliteľná tromi, druhá cifra je deliteľná štyrmi a posledná cifra je deliteľná piatimi;
- 4-ciferných čísel zložených z cifier 2, 4, 7, 9, v ktorých sa cifry neopakujú a cifra 4 sa nachádza v nich skôr ako cifra 7;
- 6-ciferných čísel zložených z cifier 1 a 7, ktoré neobsahujú tri jednotky po sebe.

Ku každej podúlohe vypíšte všetky možnosti. Zdôvodnite (stačí neformálne), prečo sú vaše riešenia správne (teda že ste každú možnosť započítali práve raz).

Bonus 1. (1 bod) V úlohe 3 možno získať bonusový bod, keď ručné vypísanie možností nahradíte vypísaním možností pomocou počítačového programu. Pre získanie celého bodu treba:

- zdôvodniť, že program vypísal možnosti správne (pokiaľ je to priamočiare, tak stačí stručné zdôvodnenie);
- zdôvodniť počet možností, ktoré program vypíše, bez toho, aby ste ho spustili.

V programe nesmiete využívať funkcie na generovanie možností (ako napr. knižnica `itertools` v Pythone). Body za samotný program budeme udeľovať podľa toho, ako náročné je odôvodniť potrebné veci (napr. zvyčajne je lepšie nepoužívať `if`).

Bonus 2. (1 bod) Napíšte program, ktorý načíta číslo n a vypíše počet všetkých n -ciferných čísel zložených z cifier 1 a 7, ktoré neobsahujú tri jednotky po sebe. Počet udelených bodov závisí od efektivity vášho

programu (teda pre ako veľké n program vypíše výsledok do pár sekúnd). Nakoľko počty možností sú pre veľké n dosť veľké, tak stačí, keď vypíšete zvyšok výsledku po delení číslom $10^9 + 7$. Správnosť vášho programu odôvodnite (náročnosť odôvodnenia závisí od konkrétneho programu).

Bonus 3. (1 bod) Formálne dokážte výsledky úloh z úlohy 3 (teda pre odôvodnenie počtu riešení využívajte kombinatorické pravidlá vyjadrené v množinách ako je to v skriptách).