Riešenia 3. sady domácich úloh

Úloha 1

(2,5 boda) Malý Janko dostal na Vianoce magnetické písmenká, ktoré obsahovali z každého z 26 písmen anglickej abecedy práve 5 identických kusov. Koľko možno z nich poskladať:

a) *(0,4 b)* 20-znakových slov, ktoré obsahujú päť písmen a a z každého zo zvyšných písmen najviac jedno;

b) *(0,3 b)* 5-znakových slov, ktorých písmená sú zoradené abecedne;

c) *(1,5 b)* 60-znakových slov, ktorých písmená sú zoradené abecedne?

d) *(0,3 b)* Označme p počet spôsobov, ktorými môže Janko všetkých 130 písmen usporiadať do kruhu, pričom spôsoby, ktoré sa líšia len otočením, považujeme za rovnaké. Rozhodnite, či je číslo

$$\frac{129!}{(5!)^{26}}$$

menšie ako p, rovné p alebo väčšie ako p.

Vaše tvrdenia zdôvodnite. Pod *slovom* rozumieme ľubovoľnú postupnosť písmen. V úlohách a) až c) uveďte výsledok v čo najjednoduchšom tvare; môže to byť aj suma, ak sa už nedá zjednodušiť.

a) Vyberieme pozície pre 5 písmen a: $\binom{20}{5}$, potom na zvyšné z 15 pozícií máme postupe $25, 24, \ldots$ možnsotí, teda spolu $\binom{20}{5} \cdot 25^{\underline{15}}$ možností.

b) Znaky si prestavíme ako 5 guličiek. Medzi ne umiestnime 25 paličiek, ktoré nám rozdelenia guličky na 26 úsekov: i-ty úsek guličiek bude zodpovedať i-tym písmenám z abecedy. Na tento výber máme $\binom{30}{5}$ možností.

c) Použijeme princíp inklúzie a exklúzie. Nech M je množina 60-znakových slov z písmen anglickej abecedy. V rámci nej nech je M_i množina tých slov, ktoré obsdahujú i-te písmeno aspoň 6-krát. Chceme vypočítať $|M - (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{26})|$, čo je podľa PIE

$$\sum_{k=0} (-1)^k S_k.$$

Pre výpočet S_k potrebujeme zistiť mohutnosť prieniku fixných k množín. To zodpovedá slovám, v ktorých je k fixných písmen aspoň 6-krát – tie rovno do slova umiestnime a ostane nám $60 - 6k$ znakov na umiestnenie. Takéto slovo si, ako v predošlej úlohe, reprezentujeme $60 - 6k$ guličkami a 25 paličkami, ktoré rozdelia guličky na 26 úsekov pre jednotlivé písmená, To nám dáva $\binom{60-6k+25}{25}$ možností. Možnosti nezávisia od výberu množín, preto sa každý z týchto počtov započíta $\binom{26}{k}$-krát. Spolu tak dostávame

$$\sum_{k=0}^{26} (-1)^k \binom{26}{k} \binom{85-6k}{25}.$$

d) Do radu písmená usporiadame $130!/(5!)^{26}$ spôsobmi. Keď rozložíme kruh do radu, tak vieme takto dostať najviac 130 rôznych postupností. Avšak napr. pre kruh $ab \ldots yzab \ldots yzab \ldots yzab \ldots yzab \ldots yz$ (ktorý má napísanú 5-krát abecedu za sebou) vieme rozložiť len 26 spôsobmi. Takže ak berieme kruh za rad, tak každú možnosť započítame viackrát, najviac 130-krát, ale niektoré menej. Preto, keď 130! vydelíme číslom

130, čím dostaneme $129!/(5!)^{26}$. Delíme však moc veľkým číslom, preto dostaneme menej možností ako p. Teda

$$\frac{129!}{(5!)^{26}} < p.$$

Úloha 2

(1,5 boda) V závislosti od nezáporného celého čísla $n \in \mathbb{N}$ vypočítajte sumu

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot 3^k \cdot \binom{n}{k}.$$

(Výsledok uveďte v uzavretom tvare, teda bez súm, troch bodiek a pod.)

Uvažujme úlohu: Máme triedu s n deťmi a jednou učiteľkou. Chceme vybrať podmnožinu detí, ktorá pôjde s učiteľkou na exkurziu, pričom každé dieťa navštívi buď zámok, múzeum, alebo kostol. Okrem toho jeden účastník výletu (dieťa alebo učiteľka) bude niesť triedneho maskota. Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť takúto výpravu?

1. riešenie. Nech na výlet ide $k \in \{0, \ldots, n\}$ detí. Máme $\binom{n}{k}$ možností na výber, ktoré dieťa pôjde. Každé vybrané dieťa má a výber tri atrakcie, teda spolu majú 3^k možnsotí. Pre nosiča maskota máme $k+1$ možností. Tieto hodnoty vynásobíme a sčítame cez všetky $k \in \{0, \ldots, n\}$ čím dostávame počet možností rovný počítnej sume.

2. riešenie Ak maskota nesie učiteľka: každé dieťa má 4 možnosti k výletu: tri atrakcie a ostať doma. Ak dieťa nesie maskota, tak máme n možností na výber, ktoré to bude. Toto dieťa má na výber 3 atrakcie a zvyšných $n-1$ detí má na výber 4 možnosti (vrátane toho, že ostane doma). Toto nám dáva $4^n + 3 \cdot n \cdot 4^{n-1}$. Keďže ide o riešenie tej istej úlohy, tak sa musí tento počet možností rovnať hľadanej sume.

Úloha 3

(1,5 boda) Nech n je kladné celé číslo. Máme postupnosť, ktorá obsahuje v nejakom poradí čísla $0, 1, \ldots, 2n$, pričom číslo n sa nachádza uprostred. V jednom kroku vieme vziať súvislý úsek postupnosti a prevrátiť jeho poradie. Dokážte, že pomocou $3n-2$ alebo menej krokov vieme čísla zoradiť vzostupne, pričom počas celého procesu zostane číslo n na svojom mieste.

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ máme postupnosť buď $(0, 1, 2)$, ktorá je už usporiadaná, alebo $(2, 1, 0)$ ktorú usporiadame otočením celej postupnosti. čiže stačí $1 = 3 \cdot 1 - 2$ ťah.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n-1$ a dokážeme ho pre n ($n \geq 2$). Nech je číslo 0 na pozícii i a číslo $2n$ na pozícii j.

Ak $i < n$ a $j > n$:

1. Otočíme úsek od 0 po i – presunieme 0 na začiatok.
2. Otočíme úsek od j po $2n$ – presunieme $2n$ na koniec.

Ak $i > n$ a $j < n$:

1. Otočíme úsek od 0 po j – presunieme $2n$ na začiatok.

2. Otočíme úsek od j po $2n$ – presunieme 0 na koniec

3. Otočíme celú postupnosť – 0 sa dostane na začiatok a $2n$ na koniec. číslo n je v strede úseku, takže sa nepohne.

Ak $i < n$ a $j < n$:

1. Otočíme úsek od 0 po i – 0 sa posunie na začiatok a $2n$ bude na j' (môže platiť aj $j' = j$, ale nemusí).

2. Otočíme úsek od j po $2n - j$. Číslo n je v strede úseku, takže sa nepohne.

3. Otočíme úsek od $2n - j$ po $2n$ – číslo $2n$ presunieme z pozície $2n - j$ na koniec.

Ak $i > n$ a $j > n$, tak postupujeme analogicky ako v predošlom prípade.

V každom prípade sme vykonali najviac tri kroky a presunuli sme číslo 0 na začiatok a číslo $2n$ na koniec. Stredným číslom n sme nehýbali – buď ho úsek vôbec neobsahoval, alebo ho mal v strede. Na pozíciách 1 až $2n - 1$ máme $2n - 1$ čísel, preto podľa indukčného predpokladu ich vieme zoradiť na $3(n-1) - 2$ krokov tak, aby prostredné číslo ostalo na mieste. (Po správnosti by sme pre potreby indukčného kroku každé číslo znížiť o 1, aby sme mali čísla od 0 a po usporiadaní ich naspäť zvýšiť.) Celkovo nám tak na usporiadanie stačí použiť $3 + 3(n-1) - 2 = 3n - 2$ krokov, čo sme mali dokázať.

Bonus. Toto riešenie nám zároveň opisuje aj algoritmus, ktorým vypíšeme výmeny. Priamočiarym preložením je napr. funkcia `sort(a, beg, end)`, ktorá utriedi zoznam `a` od pozície `beg` po `end` a vypíše pritom použité výmeny. Najskôr premiestnime najmenší a najväčší prvok v zadanom rozsahu na prvé a posledné miesto. Potom rekurzívne zavoláme `sort(a, beg + 1, end - 1)`, čo zodpovedá indukčnému predpokladu. Možno ju však implementovať aj bez rekurzie, jednoduchým cyklom.

Táto úloha bola inšpirovaná úlohou A-I-1 z 37. ročníka OI, ktorej riešenie možno nájsť tu.