

3. sada domácich úloh

Termín odovzdania: streda 20. 11. 2024, 23:59

V prípade odovzdávania cez MS odovzdajte všetky riešenia ako 1 PDF súbor. Výnimkou je program z bonusovej úlohy – ten nahrajte osobitne k PDF súboru s riešeniami.

Súčet riadnych bodov je úmyselne až 5,5 boda, takže viete okrem bonusu získať 0,5 boda navyše.

Úloha 1. (2,5 boda) Malý Janko dostal na Vianoce magnetické písmenká, ktoré obsahovali z každého z 26 písmen anglickej abecedy práve 5 identických kusov. Koľko možno z nich poskladať:

- (0,4 b) 20-znakových slov, ktoré obsahujú päť písmen a a z každého zo zvyšných písmen najviac jedno;
- (0,3 b) 5-znakových slov, ktorých písmená sú zoradené abecedne;
- (1,5 b) 60-znakových slov, ktorých písmená sú zoradené abecedne?
- (0,3 b) Označme p počet spôsobov, ktorými môže Janko všetkých 130 písmen usporiadať do kruhu, pričom spôsoby, ktoré sa líšia len otočením, považujeme za rovnaké. Rozhodnite, či je číslo

$$\frac{129!}{(5!)^{26}}$$

menšie ako p , rovné p alebo väčšie ako p .

Vaše tvrdenia zdôvodnite. Pod *slovom* rozumieme ľubovoľnú postupnosť písmen. V úlohách a) až c) uveďte výsledok v čo najjednoduchšom tvare; môže to byť aj suma, ak sa už nedá zjednodušiť.

Úloha 2. (1,5 boda) V závislosti od nezáporného celého čísla $n \in \mathbb{N}$ vypočítajte sumu

$$\sum_{k=0}^n (k+1) \cdot 3^k \cdot \binom{n}{k}.$$

(Výsledok uveďte v uzavretom tvare, teda bez súm, troch bodiek a pod.)

Úloha 3. (1,5 boda) Nech n je kladné celé číslo. Máme postupnosť, ktorá obsahuje v nejakom poradí čísla $0, 1, \dots, 2n$, pričom číslo n sa nachádza uprostred. V jednom kroku vieme vziať súvislý úsek postupnosti a prevrátiť jeho poradie. Dokážte, že pomocou $3n - 2$ alebo menej krokov vieme čísla zoradiť vzostupne, pričom počas celého procesu zostane číslo n na svojom mieste.

Bonus. (1 bod) Napíšte program, ktorý pre zadanú postupnosť čísel z predošlej úlohy vypíše postupnosť ťahov, ktoré treba vykonať, aby sme ju usporiadali.

Formát vstupu. V prvom riadku je celé číslo $n \geq 1$. V druhom riadku je $2n + 1$ medzerou oddelených čísel. Je zaručené, že ide o čísla $0, 1, \dots, 2n$ a že číslo n je v strede.

Formát výstupu. Každý ťah vypíšte do jedného riadku ako dve medzerou oddelené čísla i, j : takýto ťah znamená, že obrátíme poradie postupnosti od indexu i po index j (obe vrátane). Výstup nesmie obsahovať viac ako $3n - 2$ riadkov.

Príklad vstupu	Príklad výstupu	Poradie čísel po tejto výmene
2	0 4	0 4 2 3 1
1 3 2 4 0	3 4	0 4 2 1 3
	1 3	0 1 2 4 3
	3 4	0 1 2 3 4