4. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **piatok 3. 1. 2025, 23:59**

Úlohu odovzdajte ako jeden PDF súbor s výnimkou programu z bonusu, ktorý odovzdajte samostatne.

Úloha 1. *(1,5 bodu)* Dokážte, že relácia

$$R = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+;\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon \frac{a}{b} = 2^k\right\}$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

Úloha 2. *(1,5 bodu)* Na intervale $(1;\infty)$ definujeme reláciu $\sqsubseteq$ takú, že $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow (5x < y \vee x = y)$ pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$. Rozhodnite, či ide o reláciu usporiadania na $\mathbb{R}^+$. Ak áno, tak určte všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Všetky tvrdenia dokážte.

Úloha 3. *(2 body)* O nasledovných množinách rozhodnite a dokážte, či sú spočítateľné:

a) Množina A, ktorá obsahuje všetky postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel také, že pre všetky celé $n \geq 0$ platí $a_{2n+1} \geq a_{2n}$ a zároveň $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$.

b) Množina B, ktorá obsahuje všetky postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel také, že $a_0 = 0$ a pre všetky celé $n \geq 2$ sa člen a_n nachádza v uzavretom intervale, ktorého krajné body sú a_{n-1} a a_{n-2} (teda $a_2 \in \langle a_0, a_1\rangle$, $a_3 \in \langle a_2, a_1\rangle$, $a_4 \in \langle a_2, a_3\rangle$, $\dots$).

Úloha 4. *(1,5 bodu)* V triede je niekoľko žiakov a niektoré dvojice sa kamarátia (vzťah kamarátenia sa je symetrický). Každý žiak má aspoň jedného kamaráta. Celá trieda prišla na MatFyz, kde si každý žiak vyberie práve jednu z prednášok: buď matematickú, alebo informatickú. Dokážete, že (v každej takejto triede) sa žiaci vedia rozdeliť na dve prednášky tak, aby každý žiak Z mal aspoň jedného kamaráta, ktorý sa zúčastnil inej prednášky ako samotný žiak Z.

Bonus. *(1,5 boda)* Napíšte program, ktorý pre zadané kamarátstvá v triede vypíše rozdelenie študentov dve prednášky. Zdôvodnite (v pdf súbore alebo komentároch), prečo váš program vypíše správne rozdelenie. V prípade, že program píšete podľa dôkazu z úlohy 4, tak stačí len stručne opísať súvis s dôkazom. Pri dobrom zdôvodnení nie je veľmi dôležitá efektívnosť programu.

Formát vstupu. V prvom riadku vstupu sú dve medzerou oddelené čísla n (počet študentov) a m (počet študentov, ktorí sa kamarátia). Študentov číslujeme $0, 1, \dots, n-1$. Nasleduje m ďalších riadkov, z ktorých každý obsahuje dve medzerou oddelené čísla študentov, ktorí sa kamarátia. Je zaručené, že tieto kamarátstva spĺňajú podmienky z úlohy 4.

Formát výstupu. Program vypíše na výstup dva riadky, každý z nich bude obsahovať niekoľko medzerou oddelených čísel študentov. V prvom riadku budú študenti, ktorí sa zúčastnia matematickej prednášky, v druhom riadku účastníci fyzikálnej. Program nesme vypísať nič iné (ani veci typu „Zadajte n, m:“).

<table>
<tr><th>Príklad vstupu</th><th>Príklad výstupu</th></tr>
<tr><td>5 6
0 1
0 2
0 3
1 2
2 3
3 4</td><td>0 1 4
3 2</td></tr>
</table>