

Algebraický myš-maš

Jozef Rajník, Prípravné sústredenie pred IMO MEMO, 24. 6. 2022

Úloha 1 (KMS 15/16-Z3-6). Nech $a_1, a_2, \dots, a_{83}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{83} \leq 82 + b_1 b_2 \dots b_{83},$$

kde b_i je väčšie z čísel $\{1, a_i\}$ pre $i = 1, 2, \dots, 83$.

Úloha 2 (IMO 1994, úloha 1). Nech m, n sú kladné celé čísla. Množina $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ je taká podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ že zakaždým keď $a_i + a_j \leq n$ pre nejaké $1 \leq i \leq j \leq m$, tak $a_i + a_j$ je tiež v množine A . Dokážte, že

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Úloha 3 (Poľsko 1999, úloha 5). Dokážte, že pre ľubovoľných $2n$ celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ platí

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_i - b_j|.$$

Čo sa stane s úlohou, ak máme $2n$ reálnych čísel?

Úloha 4 (Balkán 1999). Nech $x_0, x_1, x_2, \dots$ je neklesajúca postupnosť nezáporných celých čísel taká, že pre každé $k \geq 0$ je počet členov postupnosti, ktoré sú najviac k , konečný; nech je tento počet rovný y_k . Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla m, n platí

$$(x_0 + x_1 + \dots + x_n) + (y_0 + y_1 + \dots + y_m) \geq (n+1)(m+1).$$

Úloha 5 (61MO-A-III-3). Dokážte, že medzi ľubovoľnými 101 reálnymi číslami existujú dve čísla u a v , pre ktoré platí

$$100|u - v| \cdot |1 - uv| \leq (1 + u^2)(1 + v^2).$$

Úloha 6 (IMO SL 2017 A1). Nech $a_1, a_2, \dots, a_n, k$ a M sú kladné celé čísla, pre ktoré platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{a} \quad a_1 a_2 \dots a_n = M.$$

Ak $M > 1$, dokážte, že polynóm

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$$

nemá kladné korene.

Úloha 7 (IMO SL 2017 A2). Nech q je reálne číslo. Jožo má v tablete napísaných 10 navzájom rôznych reálnych čísel a na tabuľu napíše nasledujúce tri riadky reálnych čísel:

- Do prvého riadku Jožo napíše všetky čísla tvaru $a - b$, kde a, b sú čísla z Jožovho tabletu (nie nutne rôzne).
- Do druhého riadku Jožo napíše každé číslo tvaru qab , kde a, b sú (nie nutne rôzne) čísla z prvého riadku tabule.
- Do tretieho riadku napíše Jožo každé číslo tvaru $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, kde a, b, c, d sú štyri (nie nutne rôzne) čísla z prvého riadku tabule.

Určte všetky hodnoty q , pre ktoré, bez ohľadu na čísla v Jožovom tablete, sa každé číslo z druhého riadku tabule nachádza aj v treťom riadku tabule.

Úloha 8 (IMO SL 2017 A4). Postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ spĺňa vzťah

$$a_n = -\max_{i+j=n} (a_i + a_j) \quad \text{pre všetky } n > 2017.$$

Dokážte, že táto postupnosť je ohraničená. Teda, že existuje konštanta M taká, že $|a_n| \leq M$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 9 (IMO 2001 SL A5). Nájdite všetky postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$ kladných celých čísel, pre ktoré platí

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

kde $a_0 = 1$ a pre všetky $k = 1, 2, \dots, n-1$ platí $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$.

Úloha 10 (IMO SL 1987 úloha 7). Máme daných päť reálnych čísel u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 . Dokážte, že zakaždým vieme nájsť päť reálnych čísel v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 spĺňajúce podmienky:

(i) $u_i - v_i \in \mathbb{N}$ pre všetky $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

(ii) $\sum_{0 \leq i < j \leq 4} (v_i - v_j)^2 < 4$.

Úloha 11 (Rumunsko 2000). Nech $n \geq 1$ je nepárne kladné celé číslo a nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú reálne čísla, pre ktoré $|x_{k+1} - x_k| \leq 1$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n-1$. Dokážte, že

$$\sum_{k=1}^n |x_k| - \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \frac{n^2 - 1}{4}.$$

Úloha 12 (IMO SL 2017 A5). Máme dané celé číslo $n \geq 3$. Usporiadanú n -ticu reálnych čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazývame *žiarivou*, ak pre každú jej permutáciu $y_1, y_2, \dots, y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{i+1} \geq -1.$$

Nájdite najväčšiu možnú hodnotu K (v závislosti od n), pre ktorú

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \geq K$$

platí pre každú žiarivú n -ticu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Úloha 13 (1997 Chinese Math Winter Camp). Nech $a_1, a_2, a_3, \dots$ je postupnosť nezáporných reálnych čísel, kde pre všetky kladné celé čísla m a n platí $a_{n+m} \leq a_n + a_m$. Dokážte, že

$$a_n \leq m a_1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) a_m.$$

Úloha 14 (IMO SL 2006 A4). Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

Nápovedy k riešeniam

1. Použite indukciu.
2.
 - Všimnite si, že v dokazovanej nerovnosti máte $\geq n + 1$, čo je vlastne negácia podmienky $\leq n$ zo zadania.
 - Dokáže, že $a_i + a_{m+1-i} \geq n + 1$ pre každé i a usporiadané $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$.
 - Čo ak $a_i + a_{m+1-i} \leq n$? Potom $a_i + a_{m+1-i}$ musí byť z A . No neviete nájsť aj niekoľko ďalších čísel, ktoré sú $\leq n$?
3.
 - Skúste nájsť spôsob, ako vygenerovať každú $2n$ -ticu premenných z vhodného základného prípadu tak, aby ostala zachovaná nerovnosť.
 - Pre všetky čísla rovnaké to zjavne platí. Dokážte, že ak zoberieme niekoľko čísel s maximálnou hodnotou a zvýšime ich o d , tak pravá strana nerovnosti sa zvýši aspoň o toľko čo ľavá.
4.
 - Ako pekne uchopiť súvis x -iek a y -iek? Zdôrazňujeme, že ide o nezáporné celé čísla.
 - Uvažujte tabuľku, kde v i -tom stĺpci je vyfarbených x_i políčok z kraja. Čo v tabuľke znamenajú y_i ?
5.
 - Áno, táto úloha je zadaná ako na Dirichletov princíp. Chcete si teda rozdeliť reálnu časť na 100 častí tak, že dve čísla z danej časti budú vyhovovať nerovnosti. Pre správne rozdelenie potrebujete nerovnosť vhodne upraviť.
 - Roznásobte si absolútne hodnoty a spätne rozložte na iný súčin.
 - Nerovnosť ide upraviť na tvar $|f(u) - f(v)| \leq 1/100$. Aký obor hodnôt má funkcia f ?
6.
 - Všimnite si, že $P(x)$ obsahuje v jednom súčine $a_i(x+1)^{1/a_i}$ a v druhom súčine $(x+a_i)$.
 - Tieto výrazy si pýtajú použitie AG-čka. Uvedené odhady nasčítajte, nech dostanete $P(x) \leq 0$.
7.
 - Uvažujte čísla v tablete $1, 2, \dots, 10$.
 - Odvodte, že q musí byť celé a odhadnite, že $|q| \leq 2$.
 - Vylúčte $|q| = 1$ inou vhodnou sadou čísel.
8.
 - Uvedomte si, že stačí ukázať len jeden odhad, lebo ten druhý viete z neho celkom ľahko dostať.
 - $a_n = -a_k - a_{n-k} = -a_k + \max_{l=1}^{n-k} (a_l + a_{n-k-l}) \geq -a_k + a_k + a_{n-2k} = a_{n-2k}$. Za akých predpokladov tento odhad funguje? Uvedomte si, že tie predpoklady stačia na to, aby sa to z nich dalo dokončiť.
9.
 - Upravte rekurentnú nerovnosť do krajšieho tvaru, aby ste z neho vedeli pekne odhadovať a_{k-1}/a_k .
 - Upravte ju na tvar: $\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq \frac{a_{k-1}}{a_k - 1} - \frac{a_k}{a_{k+1} - 1}$. Pravá strana nabáda na teleskopickú sumu.
 - Zosumovaním nerovnosti vyššie a vhodným odhadom dospejte k tomu, že pre určené $a_0, a_1, \dots, a_k$ existuje najviac jedno ďalšie a_{k+1} .

Literatúra

- [1] Kin Y. Li. Inequalities of Sequences, Mathematical Excalibur, volume 20, number 4 (2016). Dostupné online: https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/v20_n4.pdf
- [2] Kin Y. Li. Miscellaneous Inequalities, Mathematical Excalibur, volume 22, number 1 (2018). Dostupné online: https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/v22_n1_20181025.pdf
- [3] Archívy IMO, SKMO, KMS.