

Rekurencie

Jozef Rajník, lenté sústredenie KMS 4. - 11. 6. 2016, Vyšná Slaná

Úloha 1. Schodisko má n schodov. Jedným krokom môžeme prejsť jeden alebo dva schody. Označme $p(n)$ počet spôsobov, ako môžeme vyjsť n schodov.

- a) Vypočítajte $p(12)$.
- b) Určte zvyšok čísla $p(2016)$ po delení 3-mi.
- c) Určte poslednú cifru čísla $p(2016)$.

Hanojské veže je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť navrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže, ak sa tam nachádza disk s väčším priemerom.

Úloha 2. V závislosti od n určte najmenší počet ťahov potrebný na presunutie diskov z jednej veže na druhú.

Úloha 3. Máme dve sady Hanojských veží, v jednej n zelených a v druhej n modrých diskov. Zoberieme tri kolíky a na začiatok na jeden kolík uložíme všetkých $2n$ diskov. (Disk teraz môže byť položený len na disk s väčším alebo rovným priemerom.) Nájdite najmenší počet ťahov, na ktorý možno presunúť vežu $2n$ diskov z jedného kolíka na druhý. Disky rovnakej veľkosti musia / nemusia byť na konci v pôvodnom poradí.

Úloha 4. Označme tyče Hanojských veží A, B, C . Určte najmenší počet ťahov potrebný na presunutie n diskov z veže A na vežu B , ak priame presuny medzi vežami A a B sú zakázané.

Úloha 5. Určte najväčší počet oblastí, na ktoré môže rozdeliť rovinu n priamok.

Úloha 6. Určte minimálny a maximálny počet plôch, na ktoré môže rozdeliť plášť gule n jej rôznych obvodov. (Např. obvodmi Zeme sú všetky poludníky, rovník, ale nie obratníky).

Úloha 7. Pre dané $k \geq 3$ určte maximálny počet oblastí, na ktoré môžeme rozdeliť rovinu pomocou n pravidelných k -uholníkov.

Úloha 8. Založíme si pravidelné sporenie. Každý mesiac vložíme do banky x eur. Navyše sa naše úspory každý mesiac úročia s úrokom u . Koľko budeme mať našetrené po n mesiacoch?

Úloha 9. Chobotnica s dvomi (rozlišiteľnými) chápادلami šplhá po rebríku. V každom kroku presunie jedno svoje chápadlo o priečku vyššie, pričom rozpätie chápadiel je rovné dvojnásobku vzdialenosti medzi priečkami rebríka. Koľkými rôznymi spôsobmi môže chobotnica vyliezť na rebrík, ktorý má n priečok? [PraSe, 18. ročník, 5. séria, úloha 6]

Úloha 10. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n zostavme z písmen A, B všetky možné slová dĺžky n . Rozdeľme ich do dvoch skupín: do skupiny P_n dáme všetky slová s párnym počtom slabík BA (za párny považujeme i počet 0) a do skupiny slov N_n s nepárnym počtom. Určte, pre ktoré n majú skupiny S_n a L_n rovnaký počet prvkov. [53-A-I-3]

Úloha 11. Označme $p(n)$ počet všetkých n -ciferných čísel zložených len z cifier 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých sa každé dve susedné cifry líšia aspoň o 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$5 \cdot 2 \cdot 4^{n-1} \leq p(n) \leq 5 \cdot 2 \cdot 5^{n-1}.$$

[MO62-A-I-3]

Úloha 12. Koľkými rôznymi spôsobmi možno vydláždiť plochu 3×10 dlaždicami 2×1 , ak je dovolené klásť ich v oboch navzájom kolmých smeroch? [63MO-I-A-5]

Úloha 13. Vyriešte rekurencie

- a) $x_0 = \alpha$, $x_n = 3x_{n-1} + (-2)^n \beta$ pre $n \geq 1$ (α a β sú konštanty).
- b) $T_0 = 5$, $2T_n = nT_{n-1} + 3 \cdot n!$ pre $n \geq 1$.
- c) $T_1 = \frac{3}{2}$, $T_n = \frac{n-1}{3n}T_{n-1} + \frac{1}{n}$ pre $n \geq 1$.
- d) $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_{n+1} = (2 + \frac{1}{n})T_n - (1 + \frac{1}{n})T_{n-1}$ pre $n \geq 2$.
- e) $T_1 = 2$, $T_2 = 1$, $\frac{1}{n!} + T_n = \frac{T_{n-1}}{n} + \frac{T_{n-2}}{n^2 - n}$ pre $n \geq 3$.