

Nerovnosti

Jozef Rajník, letné sústredenie KMS ALFA, Huty, 16. – 23. 6. 2018

Množinu reálnych čísel označujeme $\mathbb{R}$. Pokiaľ ide o kladné / nezáporné reálne čísla, používame $\mathbb{R}^+$ / $\mathbb{R}_0^+$.

Úloha 1. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Úloha 3. Pre $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dokážte

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Úloha 4. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ dokážte

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{a + b}{2}.$$

Úloha 5. Pre $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dokážte

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Úloha 6. Pre $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokážte

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Úloha 7. Pre $a, b, c \in \mathbb{R}$ dokážte

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Úloha 8. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $a + b > 0$ dokážte

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Úloha 9 (KMS 02/03-Z3-1). Pre $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dokážte

$$\frac{a^3 + b^3}{3} \leq \frac{(a + b)^3}{2}.$$

Úloha 10 (KMS 08/09-L3-3). Nech a a b sú reálne čísla. O číslach ab a $a + b$ vieme, že sú buď obe kladné, alebo obe záporné, alebo aspoň jedno z nich je nulové. Dokážte nerovnosť:

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3).$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 11 (KMS 11/12-L1-3). Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2.$$

Úloha 12. Pre $a, b \in \mathbb{R}^+$ spĺňajúce $a + b = 1$ dokážte, že $a^3 + b^3 \geq ab$.

Úloha 13. Dokážte, že ak $ab = 1$, tak platí $a^4 + b^4 \geq a^2 + b^2$.

Úloha 14 (KMS 12/13-L1-3). Reálne čísla a, b spĺňajú vzťah $a - b \geq 2$. Dokážte, že $a^4 + b^4 \geq 2$.

Úloha 15 (KMS 04-05-Z3-4). Nech a, b, c sú reálne čísla také, že $a^2 + c^2 \leq 4b$. Dokážte, že pre všetky reálne čísla x platí

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \geq 0.$$

Úloha 16 (KMS 14/15-Z3-6). Máme ľubovoľné kladné reálne čísla p, e, s , pre ktoré platí $pes = 1$. Dokážte, že vždy platí

$$p^{e+s}e^{s+p}s^{p+e} \leq 1.$$

Úloha 18 (KMS 16/17-Z1-6). Pre kladné reálne čísla x, y, z platí $xyz \geq xy + yz + zx$. Dokážte, že

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Úloha 19 (KMS 10/11-L1-6). Pre reálne čísla a, b, c platí $(a + b + c)c < 0$. Dokážte, že potom má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ dve rôzne reálne riešenia.

Úloha 20 (KMS 10/11-Z3-7). Nech x, y, z sú reálne čísla také, že $0 < x, y, z < 1$ a platí $xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $(1 - x)y, (1 - y)z, (1 - z)x$ je väčšie alebo rovné ako $1/4$.

Úloha 21 (KMS 11/12-Z1-7). Nech x, y sú kladné reálne čísla také, že $(1 + x)(1 + y) = 2$. Dokážte, že platí

$$xy + \frac{1}{xy} \geq 6.$$

Úloha 22 (KMS 12/13-Z3-7). Máme reálne čísla a, b, c , pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že nanjvýš dve z čísel

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

sú väčšie ako 1.

Úloha 23 (64MO-B-S-3). Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leq 3.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 24 (64MO-B-I-6). Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 25 (60MO-B-II-1). Súčin kladných reálnych čísel a, b, c je 60 a ich súčet je 15. Dokážte nerovnosť

$$(a + b)(a + c) \geq 60$$

a zistite, pre ktoré čísla nastáva rovnosť

Úloha 26 (63MO-B-I-2). Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2.$$

Hinty k riešeniam

Pri niektorých úlohách je viac hintov. Každý je v jednom odseku, aby ste si mohli ľahšie prečítať prvý bez druhého ;).

- 3 Odstráňte zlomok a odmocninu. Hod'te všetko na jednu stranu a upravte na druhú mocninu zátvorky.
- 4 Umocnite, prehádz'te na druhú stranu a nájdite tam druhú mocninu zátvorky. Dajte si pozor na ekvivalentné úpravy! Využite, že ak $a + b < 0$, tak nerovnosť triviálne platí a v riešení uvažujte len $a + b \geq 0$.
- 5 Najprv si zjednodušte zlomok na pravej strane, potom sa zbavte zlomkov, umocnite a klasika.
- 6 Roznásobte, odčítajte 3 a vhodne si rozdeľte ľavú stranu na tri časti.
- 7 Prenásobte dvomi, hod'te na jednu stranu a členy typu ab vhodne schovajte do druhých mocnín zátvoriek.
- 8 Odstráňte zlomky a rozložte $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Vyjmite $a + b$ pred zátvorku.
- 9 Roznásobte zátvorku a upracte všetky členy na jednu stranu.
- 10 Roznásobte, prehádz'te všetko na jednu stranu a rozložte na súčin.
Dopracujete sa tak ekvivalentnými úpravami k nerovnosti $ab(a + b)(a - b)^2 \geq 0$. Využite podmienky zo zadania a ukážete, že platí.
- 11 Roznásobte a upravte na $3a^4b^2 + 3a^2b^4 - 2a^3b^3 \geq 0$. Pokúste sa na ľavej strane dostať výraz $(x - y)^2$, do ktorého „schováte“ $-2a^3b^3$. Násobky výrazov a^4b^2 a a^2b^4 sú nezáporné, takže vám nevadí, ak tam nejaké ostanú.
- 12 Vyjadrite si $b = 1 - a$ a dosad'te do dokazovanej nerovnosti.
Iné riešenie: Využite, že $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
- 13 Vyjadrite si $b = 1/a$ a dosad'te do nerovnosti.
Upravte nerovnosť na tvar $(a^2 - 1)(a^6 - 1) \geq 0$. Kedy sú zátvorky kladné a kedy záporné?
- 14 Vyjadrite si, že pre a platí $a \geq b + 2$. Dosadaním dostanete $a^4 + b^4 \geq (b + 2)^4 + b^4$. Ukážete, že tento výraz je aspoň 2.
Po roznásobení $(b + 2)^4 + b^4$ odčlente výraz $2(b + 1)^2$ a zo zvyšných členov vyskladajte $(x + y)^2$.
- 15 Z podmienky $a^2 + c^2 \leq 4b$ vidíme, že b je nezáporné. Na ľavej strane si treba všimnúť výrazy x^4 , bx^2 a 1, lebo tieto budú nezáporné aj pre záporné x . Pomocou nich musíme „vyvážiť“ výrazy ax^3 a cx , ktoré môžu byť záporné.
Skúste doplnenie na štvorec. Čo chýba ku výrazu $x^4 + ax^3$? Už len posledný člen z rozvoje $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$.
- 18 Predel'te $\sqrt{xyz}$, resp. xyz a zaved'te si nové premenné

$$a = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

- 19 Rozlíšte prípady, kedy je c kladné a záporné (nulové byť nemôže). Ak určíte znamienko čísla c , pre jedno znamienko a nerovnosť triviálne platí.

V prípade, keď $c > 0$ a $a \geq 0$, platí $|b| > a + c$. Odvod'te z tejto nerovnosti dokazovanú nerovnosť $b^2 \geq 4ac$. Vyz'te pritom, že $a^2 + c^2 \geq 2ac$.

20 Skúste riešiť sporom. Predpokladajte, že všetky tri čísla sú menšie ako $1/4$. Postupne odvodzujte, ktoré čísla z x, y, z sú menšie / väčšie ako $1/2$ a dospejte ku sporu.

21 Upravujte dokazovanú nerovnosť, pri úpravách využívajte rovnosť $(1+x)(1+y) = 2$. Príde vhod si túto rovnosť roznásobiť.

Dokazovanú nerovnosť si upravte na $(1-xy)^2 \geq 4xy$. Z rovnosti zo zadania si vyjadrite, že $1-xy = x+y$ a dosadte. Máte teda dokazovať nerovnosť $(x+y)^2 \geq 4xy$.

23 Dokážte, že

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} \leq 1.$$

24 Vyskladajte dokazovanú nerovnosť z viacerých jednoduchších nerovností. Dokážte, že

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} \leq \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}.$$

Zhrnutie

Pri dokazovaní nerovností sa dosť často používajú nasledovné postupy:

- roznásobenie výrazov;
- prehodenie výrazov na jednu stranu;
- rozklady na súčin, hlavne na párne mocniny dvoj-, príp. mnohočlenov (často vie byť najst správny rozklad dosť netriviálne);
- rozdeľovanie členov výrazu na viac častí (napr. $3x = x + 2x$);
- rozdelenie nerovnosti na viacero nerovností, z ktorých platnosti vyplýva platnosť dokazovanej nerovnosti;
- využitie známej nerovnosti (napr. $a^2 + b^2 \geq 2ab$);
- rozlišovanie prípadov: znamienko premennej alebo usporiadanie premenných (pri symetrických nerovnostiach vychádza väčšina prípadov rovnako len s vymenenými označeniami).

Na čo nezabúdať

Pri riešení úloh je dôležité nezabudnúť na to, že pri dokazovaní dokazujeme smerom od platnej nerovnosti k dokazovanej, čo je presne opačne ako zväčša úlohy riešime. Nezabudnite si overiť, že všetky úpravy možno použiť aj spätne, príp. že ste použili len ekvivalentné úpravy.

Dávajte si pozor na znamienka. Keď násobíte nerovnosť nejakým výrazom, overte, či je kladný.

Čo ďalej

Táto prednáška je len drobná ochutnávka z tajomstiev nerovností. Existuje kvantum pokročilejších a pokročilých metód na dokazovanie nerovností. Zhruba načrtneme v čom asi spočívajú. Jednak si pri nerovnostiach môžeme určovať extra predpoklady. Stretli sme sa s jednoduchými predpokladmi, napr. sme bez ujmy na všeobecnosti predpokladali, že $x \leq y$, lebo keď by sme v nerovnici vymenili x a y , nič by sa nezmenilo. Pokročilejšími úvahami sa môžeme dopracovať k predpokladom ako napr. $abc = 1$.

Dvojak dosť veľkú skupinu pokročilých metód tvoria známe nerovnosti, ktoré možno pri riešení úloh využívať. Jednou z najznámejších je *nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom* (skrátene *AG-nerovnosť*), ktorá hovorí, že pre ľubovoľných n nezáporných reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Výraz na ľavej strane je *aritmetický priemer* čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ a výraz na pravej strane je ich *geometrický priemer*. Túto nerovnosť pre $n = 2$ ste dokazovali v úlohe 3.

Pokiaľ sa chcete dozvedieť viac, vynikajúcim materiálom je seriál Nerovnosti od PraSe, dostupný na <https://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf>.