

Nerovnosti

Jozef Rajník, KMS víkend 20. – 22. 9. 2019

Množinu reálnych čísel označujeme $\mathbb{R}$. Pokiaľ ide o kladné / nezáporné reálne čísla, používame $\mathbb{R}^+$ / $\mathbb{R}_0^+$.

Úloha 1. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Úloha 3. Pre $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dokážte

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

ý

Úloha 4. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ dokážte

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{a + b}{2}.$$

Úloha 5. Pre $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dokážte

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Úloha 6. Pre $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokážte

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Úloha 7. Pre $a, b, c \in \mathbb{R}$ dokážte

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Úloha 8. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $a + b > 0$ dokážte

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Úloha 9 (KMS 02/03-Z3-1). Pre $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dokážte

$$\frac{a^3 + b^3}{3} \leq \frac{(a + b)^3}{2}.$$

Úloha 10 (KMS 08/09-L3-3). Nech a a b sú reálne čísla. O číslach ab a $a + b$ vieme, že sú buď obe kladné, alebo obe záporné, alebo aspoň jedno z nich je nulové. Dokážte nerovnosť:

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3).$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 11 (KMS 11/12-L1-3). Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2.$$

Úloha 12. Pre $a, b \in \mathbb{R}^+$ spĺňajúce $a + b = 1$ dokážte, že $a^3 + b^3 \geq ab$.

Úloha 13. Dokážte, že ak $ab = 1$, tak platí $a^4 + b^4 \geq a^2 + b^2$.

Úloha 14 (KMS 12/13-L1-3). Reálne čísla a, b spĺňajú vzťah $a - b \geq 2$. Dokážte, že $a^4 + b^4 \geq 2$.

Úloha 15 (KMS 04-05-Z3-4). Nech a, b, c sú reálne čísla také, že $a^2 + c^2 \leq 4b$. Dokážte, že pre všetky reálne čísla x platí

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \geq 0.$$

Úloha 16 (KMS 14/15-Z3-6). Máme ľubovoľné kladné reálne čísla p, e, s , pre ktoré platí $pes = 1$. Dokážte, že vždy platí

$$p^{e+s} e^{s+p} s^{p+e} \leq 1.$$

Úloha 18 (KMS 16/17-Z1-6). Pre kladné reálne čísla x, y, z platí $xyz \geq xy + yz + zx$. Dokážte, že

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Úloha 19 (KMS 10/11-L1-6). Pre reálne čísla a, b, c platí $(a + b + c)c < 0$. Dokážte, že potom má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ dve rôzne reálne riešenia.

Úloha 20 (KMS 10/11-Z3-7). Nech x, y, z sú reálne čísla také, že $0 < x, y, z < 1$ a platí $xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $(1 - x)y, (1 - y)z, (1 - z)x$ je väčšie alebo rovné ako $1/4$.

Úloha 21 (KMS 11/12-Z1-7). Nech x, y sú kladné reálne čísla také, že $(1 + x)(1 + y) = 2$. Dokážte, že platí

$$xy + \frac{1}{xy} \geq 6.$$

Úloha 22 (KMS 12/13-Z3-7). Máme reálne čísla a, b, c , pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že nanajvýš dve z čísel

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

sú väčšie ako 1.

Úloha 23 (64MO-B-S-3). Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leq 3.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 24 (64MO-B-I-6). Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 25 (60MO-B-II-1). Súčin kladných reálnych čísel a, b, c je 60 a ich súčet je 15. Dokážte nerovnosť

$$(a + b)(a + c) \geq 60$$

a zistite, pre ktoré čísla nastáva rovnosť

Úloha 26 (63MO-B-I-2). Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2.$$

Úloha 27 (63MO-A-III-6). Pre ľubovoľné nezáporné čísla a a b dokážte nerovnosť

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{a + b}{\sqrt{ab + 1}}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Hinty k riešeniam

Pri niektorých úlohách je viac hintov. Každý je v jednom odseku, aby ste si mohli ľahšie prečítať prvý bez druhého ;).

- 1 Prehod'te všetky členy na jednu stranu a rozložte na súčin.
- 2 Nahraďte a , b z predchádzajúcej úlohy a/b a b/a .
- 3 Odstráňte zlomok a odmocninu. Hod'te všetko na jednu stranu a upravte na druhú mocninu zátvorky.
- 4 Umocnite, prehádzte na druhú stranu a nájdite tam druhú mocninu zátvorky. Dajte si pozor na ekvivalentné úpravy! Využite, že ak $a + b < 0$, tak nerovnosť triviálne platí a v riešení uvažujte len $a + b \geq 0$.
- 5 Najprv si zjednodušte zlomok na pravej strane, potom sa zbavte zlomkov, umocnite a klasika.
- 6 Roznásobte, odčítajte 3 a vhodne si rozdeľte ľavú stranu na tri časti.
- 7 Prenásobte dvomi, hod'te na jednu stranu a členy typu ab vhodne schovajte do druhých mocnín zátvoriek.
- 8 Odstráňte zlomky a rozložte $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Vyjmite $a + b$ pred zátvorku.
- 9 Roznásobte zátvorku a upracte všetky členy na jednu stranu.
- 10 Roznásobte, prehádzte všetko na jednu stranu a rozložte na súčin.
Dopracujete sa tak ekvivalentnými úpravami k nerovnosti $ab(a + b)(a - b)^2 \geq 0$. Využite podmienky zo zadania a ukážete, že platí.
- 11 Roznásobte a upravte na $3a^4b^2 + 3a^2b^4 - 2a^3b^3 \geq 0$. Pokúste sa na ľavej strane dostať výraz $(x - y)^2$, do ktorého „schováte“ $-2a^3b^3$. Násobky výrazov a^4b^2 a a^2b^4 sú nezáporné, takže vám nevaďí, ak tam nejaké ostanú.
- 12 Vyjadrite si $b = 1 - a$ a dosad'te do dokazovanej nerovnosti.
Iné riešenie: Využite, že $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
- 13 Vyjadrite si $b = 1/a$ a dosad'te do nerovnosti.
Upravte nerovnosť na tvar $(a^2 - 1)(a^6 - 1) \geq 0$. Kedy sú zátvorky kladné a kedy záporné?
- 14 Vyjadrite si, že pre a platí $a \geq b + 2$. Dosadaním dostanete $a^4 + b^4 \geq (b + 2)^4 + b^4$. Ukážete, že tento výraz je aspoň 2.
Po roznásobení $(b + 2)^4 + b^4$ odčlente výraz $2(b + 1)^2$ a zo zvyšných členov vyskladajte $(x + y)^2$.
- 15 Z podmienky $a^2 + c^2 \leq 4b$ vidíme, že b je nezáporné. Na ľavej strane si treba všimnúť výrazy x^4 , bx^2 a 1, lebo tieto budú nezáporné aj pre záporné x . Pomocou nich musíme „vyvážiť“ výrazy ax^3 a cx , ktoré môžu byť záporné.
Skúste doplnenie na štvorec. Čo chýba ku výrazu $x^4 + ax^3$? Už len posledný člen z rozvoje $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$.
- 16 Usporiajte si premenné: $p \leq e \leq s$ a upravte ich exponenty (s využitím odhadov) na rovnakú hodnotu.
- 18 Predel'te $\sqrt{xyz}$, resp. xyz a zaved'te si nové premenné

$$a = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

19 Rozlíšte prípady, kedy je c kladné a záporné (nulové byť nemôže). Ak určíte znamienko čísla c , pre jedno znamienko a nerovnosť triviálne platí.

V prípade, keď $c > 0$ a $a \geq 0$, platí $|b| > a + c$. Odvodte z tejto nerovnosti dokazovanú nerovnosť $b^2 \geq 4ac$. Vyžite pritom, že $a^2 + c^2 \geq 2ac$.

20 Skúste riešiť sporom. Predpokladajte, že všetky tri čísla sú menšie ako $1/4$. Postupne odvodzujte, ktoré čísla z x, y, z sú menšie / väčšie ako $1/2$ a dospejte ku sporu.

21 Upravujte dokazovanú nerovnosť, pri úpravách využívajte rovnosť $(1+x)(1+y) = 2$. Príde vhod si túto rovnosť roznásobiť.

Dokazovanú nerovnosť si upravte na $(1-xy)^2 \geq 4xy$. Z rovnosti zo zadania si vyjadrite, že $1-xy = x+y$ a dosadte. Máte teda dokazovať nerovnosť $(x+y)^2 \geq 4xy$.

23 Dokážte, že

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} \leq 1.$$

24 Vyskladajte dokazovanú nerovnosť z viacerých jednoduchších nerovností. Dokážte, že

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} \leq \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}.$$

27 Vylúčte zjavné prípady rovnosti, predpokladajte $a > b$ a využite to pri dokazovaní. Využite taktiež, že

$$(\sqrt{ab+1} - \sqrt{b^2+1}) = \frac{b(a-b)}{\sqrt{ab+1} + \sqrt{b^2+1}}.$$