

Nerovnosti

Jozef Rajník, Náhradné sústredenie KMS 1. – 6. 9., Ražské Teplice

Množinu reálnych čísel označujeme $\mathbb{R}$. Pokiaľ ide o kladné / nezáporné reálne čísla, používame $\mathbb{R}^+$ / $\mathbb{R}_0^+$.

Na začiatok si ukážeme dôležité známe nerovnosti medzi priermi dvoch čísel. Najznámejšia je nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom.

Tvrdenie 1 (KAGH nerovnosť). Pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ platí

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

pričom vo všetkých nerovnostiach nastáva rovnosť práve vtedy, keď $a = b$.

Rovnaké nerovnosti platia aj všeobecne pre n čísel.

Tvrdenie 2. Pre ľubovoľných n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ platí

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

pričom vo všetkých nerovnostiach nastáva rovnosť práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Úloha 1. Pre $a, b, c \in \mathbb{R}$ dokážte

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Úloha 2. Pre $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokážte

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

1 Jednoduché úlohy

Úloha 3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Úloha 4. Pre $a, b \in \mathbb{R}^+$ dokážte

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}.$$

Úloha 5. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $a + b > 0$ dokážte

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Úloha 6 (KMS 02/03-Z3-1). Pre $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dokážte

$$\frac{a^3 + b^3}{3} \leq \frac{(a + b)^3}{2}.$$

Úloha 7 (KMS 08/09-L3-3). Nech a a b sú reálne čísla. O číslach ab a $a + b$ vieme, že sú buď obe kladné, alebo obe záporné, alebo aspoň jedno z nich je nulové. Dokážte nerovnosť:

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3).$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 8 (KMS 11/12-L1-3). Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2.$$

Úloha 9. Pre $a, b \in \mathbb{R}^+$ spĺňajúce $a + b = 1$ dokážte, že $a^3 + b^3 \geq ab$.

Úloha 10. Dokážte, že ak $ab = 1$, tak platí $a^4 + b^4 \geq a^2 + b^2$.

Úloha 11 (KMS 12/13-L1-3). Reálne čísla a, b spĺňajú vzťah $a - b \geq 2$. Dokážte, že $a^4 + b^4 \geq 2$.

Úloha 12 (KMS 04-05-Z3-4). Nech a, b, c sú reálne čísla také, že $a^2 + c^2 \leq 4b$. Dokážte, že pre všetky reálne čísla x platí

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \geq 0.$$

Úloha 13 (KMS 14/15-Z3-6). Máme ľubovoľné kladné reálne čísla p, e, s , pre ktoré platí $pes = 1$. Dokážte, že vždy platí

$$p^{e+s} e^{s+p} s^{p+e} \leq 1.$$

Úloha 18 (KMS 16/17-Z1-6). Pre kladné reálne čísla x, y, z platí $xyz \geq xy + yz + zx$. Dokážte, že

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Úloha 19 (KMS 10/11-L1-6). Pre reálne čísla a, b, c platí $(a + b + c)c < 0$. Dokážte, že potom má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ dve rôzne reálne riešenia.

Úloha 20 (KMS 10/11-Z3-7). Nech x, y, z sú reálne čísla také, že $0 < x, y, z < 1$ a platí $xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $(1 - x)y, (1 - y)z, (1 - z)x$ je väčšie alebo rovné ako $1/4$.

Úloha 21 (KMS 11/12-Z1-7). Nech x, y sú kladné reálne čísla také, že $(1 + x)(1 + y) = 2$. Dokážte, že platí

$$xy + \frac{1}{xy} \geq 6.$$

Úloha 22 (KMS 12/13-Z3-7). Máme reálne čísla a, b, c , pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že nanajvýš dve z čísel

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

sú väčšie ako 1.

Úloha 23 (64MO-B-S-3). Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leq 3.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 24 (64MO-B-I-6). Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 25 (63MO-B-I-2). Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2.$$

Úloha 26 (63MO-A-III-6). Pre ľubovoľné nezáporné čísla a a b dokážte nerovnosť

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{a + b}{\sqrt{ab + 1}}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Hinty k riešeniam

Pri niektorých úlohách je viac hintov. Každý je v jednom odseku, aby ste si mohli ľahšie prečítať prvý bez druhého ;).

1 Prenásobte dvomi, hod'te na jednu stranu a členy typu ab vhodne schovajte do druhých mocnín zátvoriek.

2 Roznásobte, odčítajte 3 a vhodne si rozdeľte ľavú stranu na tri časti.

3 Skúste objaviť nerovnosť, s ktorou ste sa stretli. Môže pomôcť odstránenie zlomkov.

4 Odstráňte zlomky, roznásobte a dostaňte všetko na jednu stranu.

5 Odstráňte zlomky a rozložte $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Vymajte $a + b$ pred zátvorku.

6 Roznásobte zátvorku a upracte všetky členy na jednu stranu.

7 Roznásobte, prehádzte všetko na jednu stranu a rozložte na súčin.

Dopracujete sa tak ekvivalentnými úpravami k nerovnosti $ab(a + b)(a - b)^2 \geq 0$. Využite podmienky zo zadania a ukážte, že platí.

8 Roznásobte a upravte na $3a^4b^2 + 3a^2b^4 - 2a^3b^3 \geq 0$. Pokúste sa na ľavej strane dostať výraz $(x - y)^2$, do ktorého „schováte“ $-2a^3b^3$. Násobky výrazov a^4b^2 a a^2b^4 sú nezáporné, takže vám nevadí, ak tam nejaké ostanú.

9 Vyjadrite si $b = 1 - a$ a dosad'te do dokazovanej nerovnosti.

Iné riešenie: Využite, že $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

10 Vyjadrite si $b = 1/a$ a dosad'te do nerovnosti.

Upravte nerovnosť na tvar $(a^2 - 1)(a^6 - 1) \geq 0$. Kedy sú zátvorky kladné a kedy záporné?

11 Vyjadrite si, že pre a platí $a \geq b + 2$. Dosadením dostanete $a^4 + b^4 \geq (b + 2)^4 + b^4$. Ukážte, že tento výraz je aspoň 2.

Po roznásobení $(b + 2)^4 + b^4$ odčleňte výraz $2(b + 1)^2$ a zo zvyšných členov vyskladajte $(x + y)^2$.

12 Z podmienky $a^2 + c^2 \leq 4b$ vidíme, že b je nezáporné. Na ľavej strane si treba všimnúť výrazy x^4 , bx^2 a 1, lebo tieto budú nezáporné aj pre záporné x . Pomocou nich musíme „vyvážiť“ výrazy ax^3 a cx , ktoré môžu byť záporné.

Skúste doplnenie na štvorec. Čo chýba ku výrazu $x^4 + ax^3$? Už len posledný člen z rozvoje $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$.

13 Usporiajte si premenné: $p \leq e \leq s$ a upravte ich exponenty (s využitím odhadov) na rovnakú hodnotu.

18 Predel'te $\sqrt{xyz}$, resp. xyz a zaved'te si nové premenné

$$a = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

19 Rozlíšte prípady, kedy je c kladné a záporné (nulové byť nemôže). Ak určíte znamienko čísla c , pre jedno znamienko a nerovnosť triviálne platí.

V prípade, keď $c > 0$ a $a \geq 0$, platí $|b| > a + c$. Odvod'te z tejto nerovnosti dokazovanú nerovnosť $b^2 \geq 4ac$. Vyžite pritom, že $a^2 + c^2 \geq 2ac$.

20 Skúste riešiť sporom. Predpokladajte, že všetky tri čísla sú menšie ako $1/4$. Postupne odvodzujte, ktoré čísla z x, y, z sú menšie / väčšie ako $1/2$ a dospejte ku sporu.

21 Upravujte dokazovanú nerovnosť, pri úpravách využívajte rovnosť $(1+x)(1+y) = 2$. Príde vhod si túto rovnosť roznásobiť.

Dokazovanú nerovnosť si upravte na $(1-xy)^2 \geq 4xy$. Z rovnosti zo zadania si vyjadrite, že $1-xy = x+y$ a dosad'te. Máte teda dokazovať nerovnosť $(x+y)^2 \geq 4xy$.

23 Dokážte, že

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} \leq 1.$$

24 Vyskladajte dokazovanú nerovnosť z viacerých jednoduchších nerovností. Dokážte, že

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} \leq \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}.$$

26 Vylúčte zjavné prípady rovnosti, predpokladajte $a > b$ a využite to pri dokazovaní. Využite taktiež, že

$$(\sqrt{ab+1} - \sqrt{b^2+1}) = \frac{b(a-b)}{\sqrt{ab+1} + \sqrt{b^2+1}}.$$