

Nerovnosti s veľa číslami

Jozef Rajník, Letná škola matematiky, 25. 7. 2025

Úloha 1 (KMS 15/16-Z3-6). Nech $a_1, a_2, \dots, a_{83}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{83} \leq 82 + b_1 b_2 \dots b_{83},$$

kde b_i je väčšie z čísel $\{1, a_i\}$ pre $i = 1, 2, \dots, 83$.

Úloha 2 (IMO 1994, úloha 1). Nech m, n sú kladné celé čísla. Množina $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ je taká podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ že za každým keď $a_i + a_j \leq n$ pre nejaké $1 \leq i \leq j \leq m$, tak $a_i + a_j$ je tiež v množine A . Dokážte, že

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Úloha 3 (Poľsko 1999, úloha 5). Dokážte, že pre ľubovoľných $2n$ reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ platí

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_i - b_j|.$$

Úloha 4. Nech $x_0, x_1, x_2, \dots$ je neklesajúca postupnosť nezáporných celých čísel taká, že pre každé $k \geq 0$ je počet členov postupnosti, ktoré sú nanajvýš k , konečný; nech je tento počet rovný y_k . Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla m, n platí

$$(x_0 + x_1 + \dots + x_n) + (y_0 + y_1 + \dots + y_m) \geq (n+1)(m+1).$$

Úloha 5 (Čínska dievčenská MO 2007). Nech m, n sú celé čísla spĺňajúce $m > n \geq 2$. Nech $S = \{1, 2, \dots, m\}$ a $T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq S$. Predpokladajme, že v množine T neexistujú dva rôzne prvky, ktoré sú oba deliteľmi niektorého prvku množiny S . Dokážte, že

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{m+n}{m}.$$

Úloha 6 (Rumunská MO 2000). Nech $n \geq 1$ je nepárne celé číslo a nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú reálne čísla také, že $|x_{k+1} - x_k| \leq 1$ pre každé $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Dokážte, že

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| - |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq \frac{n^2 - 1}{4}.$$

Úlohy pre ďalšie riešenie

Úloha 7 (KMS 18/19-Z3-6). Dokážte, že neexistuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel taká, že

$$a_{n-1} \leq (a_{n+1} - a_n)^2 \leq a_n$$

pre všetky $n \geq 2$.

Úloha 8 (KMS 18/19-L3-9). Majme ľubovoľnú postupnosť kladných reálnych čísel $a_0, a_1, a_2, \dots$. Dokážte, že nerovnosť

$$1 + a_n > a_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

platí pre nekonečne veľa kladných celých čísel n .

Úloha 9 (MO73 A-II-4). Súčet 74 (nie nutne rôznych) reálnych čísel z uzavretého intervalu $[4, 10]$ je 356. Určte najväčšiu možnú hodnotu súčtu ich druhých mocnín.

Úloha 10 (KMS 07/08-Z2-10). Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ spĺňajú vzťah $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m + r$, kde m je celé číslo a $r \in \langle 0, 1 \rangle$. Dokážte, že $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq m + r^2$.

Úloha 11 (VJIMC 2018, p. 3). Nech n je kladné celé číslo a nech $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ sú reálne čísla spĺňajúce

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0.$$

Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí

$$a_1[x] + a_2[2x] + \dots + a_n[nx] \geq 0.$$

Úloha 12 (IMO Shortlist 2001). Nájdite všetky n -tice čísel (pre každé n) $a_1, a_2, \dots, a_n$, pre ktoré platí

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

kde $a_0 = 1$ a $(a_{k-1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$ pre každé $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Literatúra

- [1] Kin Y. Li: *Miscellaneous Inequalities*, Mathematical Excalibur, 2018, vol. 22, no. 1, dostupné na: https://www.math.ust.hk/excalibur/v22_n1_20181025.pdf
- [2] Archív KMS, dostupný na <https://kms.sk/archiv/>.

Náznaky riešení

1 Použite indukciu.

2 Dokáže, že $a_i + a_{m+1-i} \geq n + 1$ pre každé i .

3 Pre všetky čísla rovnaké to zjavne platí. Dokážte, že ak zoberieme niekoľko čísel s maximálnou hodnotou a zvýšime ich o d , tak pravá strana nerovnosti sa zvýši aspoň o toľko čo ľavá.

4 Nájdite vhodnú interpretáciu úlohy na štvorčekovej mriežke.

V i -tom stĺpci štvorčekovej mriežky vyfarbíme prvých x_i políčok načierno, zvyšné políčka ostanú biele. Potom y_i určuje počet bielych políčok v i -tom riadku.

5 Prenásobte si nerovnosť m -kom.

Nech $k_i = \lfloor m/a_i \rfloor$. Tieto čísla $k_1, \dots, k_n$ poskytujú dobrý nástroj na odhadovanie ľavej strany nerovnosti.

6 Uvažujte K súčet kladných členov a Z súčet záporných, ktorých je BUNV viac (v počte, nie v súčte) ako kladných. Usporiadajte si postupnosť a odhadnite pomocou usporiadanej postupnosti P .