

Postupnosti

Jozef Rajník, KMS sústredenie BETA, 7. – 12. 2. 2022, Kysak

Úloha 1. Nájdite predpis pre rekurentnú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

a) $a_1 = k$ a $a_{n+1} = xa_n + y$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$;

b) $a_0 = 5$ a $2a_n = na_{n-1} + 3n!$.

Úloha 2 (KMS 07/08-Z3-7). Majme nekonečnú aritmetickú postupnosť, ktorá obsahuje iba prirodzené čísla. Dokážte, že ak obsahuje nejakú druhú mocninu prirodzeného čísla, potom obsahuje nekonečne veľa druhých mocnín prirodzených čísel.

Úloha 3 (KMS 08/09-Z1-13). Nech $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 24$ a

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}, \quad \text{pre } n > 3.$$

Dokážte, že táto postupnosť obsahuje práve jedno prvočíslo.

Úloha 4 (KMS 05/06-Z3-11). Nech $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 15$ a s predpisom

$$a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3} \quad \text{pre } n \geq 4.$$

Dokážte, že ak je a_n prvočíslo, tak aj n je prvočíslo.

Ďalšie úlohy na postupnosti

Úloha 5 (KMS 05/06-L1-9). Nech $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n \in \mathbb{N}$ (známa Fibonacciho postupnosť). Zistite, či existuje nekonečná rastúca aritmetická postupnosť prirodzených čísel, ktorá neobsahuje žiadne číslo z Fibonacciho postupnosti.

Úloha 6 (KMS 02/03-L3-8). Majme postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$ definovanú takto:

(i) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

(ii) ak $a_n \cdot a_{n+1}$ je párne, tak $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 3a_n$,

(iii) ak $a_n \cdot a_{n+1}$ je nepárne, tak $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

Ukážte, že a_n nemôže byť nula pre žiadne prirodzené číslo $n \geq 3$.

Úloha 7 (KMS 10/11-2Z-13). Postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ spĺňa $1 < a_1 < 2$ a pre všetky prirodzené k platí

$$a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k}.$$

Dokážte, že existuje najviac jedna dvojica (i, j) , že $i < j$ a zároveň $a_i + a_j$ je celé číslo.

Úloha 8 (KMS 09/10-3L-11). Prirodzené číslo b je väčšie ako jedna. Pre kladné reálne číslo a platí $1/a + 1/b > 1$. Dokážte, že potom postupnosť čísel $\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor, \dots$ obsahuje nekonečne veľa zložených celočíselných mocnín čísla b .