

Reukrencie

Jozef Rajník, 13. 3. 2021

Úloha 1. Na koľko najviac častí môžeme rozdeliť rovinu pomocou n priamok?

Úloha 2. Určte minimálny a maximálny počet plôch, na ktoré môže rozdeliť plášť gule n jej rôznych obvodov. (Např. obvodmi Zeme sú všetky poludníky, rovník, ale nie obratníky).

Hanojské veže je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť navrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže, ak sa tam nachádza disk s väčším priemerom.

Úloha 3. V závislosti od n určte najmenší počet ťahov potrebný na presunutie diskov z jednej veže na druhú.

Úloha 4. Označme tyče Hanojských veží A, B, C . Určte najmenší počet ťahov potrebný na presunutie n diskov z veže A na vežu B , ak priame presuny medzi vežami A a B sú zakázané.

Úloha 5. Máme dve sady Hanojských veží, v jednej n zelených a v druhej n modrých diskov. Zoberieme tri kolíky a na začiatok na jeden kolík uložíme všetkých $2n$ diskov. (Disk teraz môže byť položený len na disk s väčším alebo rovným priemerom.) Nájdite najmenší počet ťahov, na ktorý možno presunúť vežu $2n$ diskov z jedného kolíka na druhý, ak disky rovnakej veľkosti a) nemusia b) musia byť na konci v pôvodnom poradí.

Úloha 6. a) $a_n = 2a_{n-1} + 2$

$$a_n = 2^{n+1} - 2$$

b) $b_n = 4b_{n-1} + 3$

$$b_n = 4^n - 1$$

Úloha 7. Pre dané $k \geq 3$ určte maximálny počet oblastí, na ktoré môžeme rozdeliť rovinu pomocou n pravidelných k -uholníkov.

Úloha 8. Založíme si pravidelné sporenie. Každý mesiac vložíme do banky x eur. Navyše sa naše úspory každý mesiac úročia s úrokom u . Koľko budeme mať naštrené po n mesiacoch?

Úloha 9. Schodisko má n schodov. Jedným krokom môžeme prejsť jeden alebo dva schody. Označme $p(n)$ počet spôsobov, ako môžeme vyjsť n schodov.

a) Vypočítajte $p(12)$.

b) Určte zvyšok čísla $p(2021)$ po delení 3-mi.

c) Určte poslednú cifru čísla $p(2021)$.

Úloha 10 (PraSe 18. ročník, 5. séria, úloha 6). Chobotnica s dvomi (rozlíšiteľnými) chápadlami šplhá po rebríku. V každom kroku presunie jedno svoje chápadlo o priečku vyššie, pričom žiadne dve chápadlá nemôžu byť vzdialené viac ako vzdialenosť medzi dvomi priečkami rebríka. Koľkými rôznymi spôsobmi môže chobotnica vyliezť na rebrík, ktorý má n priečok?

Úloha 11 (PraSe 18. ročník, 8. séria, úloha 5). Chobotnička z predchádzajúcej úlohy dorástlo jedno chápadlo. Označme p_n počet spôsobov ako môže vyjsť schodisko s n schodmi. Určte

a) $p(7)$,

b) zvyšok čísla $p(2021)$ po delení 14-timi,

Úloha 12 (63MO-A-I-5). Koľkými rôznymi spôsobmi možno vydláždiť plochu 3×10 dlaždicami 2×1 , ak je dovolené klásť ich v oboch navzájom kolmých smeroch?

Úloha 13 (MO53-A-I-3). Pre ľubovoľné prirodzené číslo n zostavme z písmen A, B všetky možné slová dĺžky n . Rozdeľme ich do dvoch skupín: do skupiny P_n dáme všetky slová s párnym počtom slabík BA (za párny považujeme i počet 0) a do skupiny slová N_n s nepárnym počtom. Určte, pre ktoré n majú skupiny S_n a L_n rovnaký počet prvkov.

Úloha 14 (MO62-A-I-3). Označme $p(n)$ počet všetkých n -ciferných čísel zložených len z cifier 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých sa každé dve susedné cifry líšia aspoň o 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$5 \cdot 2 \cdot 4^{n-1} \leq p(n) \leq 5 \cdot 2 \cdot 5^{n-1}.$$

Vo väčšine úloh nájdete najprv rekurentný predpis a potom explicitné vyjadrenie. Niekde na začiatku nájdete pred tým nejakú nápovedu.

Náznaky riešení

1 Koľko najviac oblastí vie pribudnúť po pridaní jeden priamky? Pozrite sa na priesečníky.

$$a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 2$$

$$a_n = 1 + n(n+1)/2$$

$$\mathbf{2} \quad a_n = a_{n-1} + 2(n-1), a_1 = 2$$

$$a_n = 2 + n(n-1)$$

$$\mathbf{3} \quad a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n = 2^n - 1$$

$$\mathbf{4} \quad a_n = 3a_{n-1} + 2$$

$$a_n = 3^n - 1$$

$$\mathbf{8} \quad a_n = (1+u)a_{n-1} + x, a_0 = x$$

$$a_n = \frac{(1+u)^{n+1} - 1}{u} \cdot x$$

9 $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$ – ide o posunutú Fibonacciho postupnosť

b) vypíšte si zvyšky, po čase sa začnú opkovať

c) skúmajte zvlášť zvyšky po delení 2 a 5 – pomocou nich viete jednoznačne určiť zvyšok po delení 10

10 Pridajte si do úlohu ďalšiu postupnosť a vytvorte dva rekurentné predpisy.

a_n = počet možností, čo počítame, b_n = počet možností, ak máme jedno chápadlo o priečku vyššie.

$$a_n = 2b_n, b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$a_n = 3a_{n-1}$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

11 Dodáme c_n ak začíname s dvoimi chápadlami vyššie. $a_n = 3b_n$

$$b_n = 2c_n + 2b_{n-1} + 2c_{n-1}$$

$$c_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1} - 1$$

12 a_n = hľadaný počet, b_n = počet možností, ak máme ukúsnutý jeden roh $a_n = 2b_{n-1} + a_{n-2}$

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-2}$$